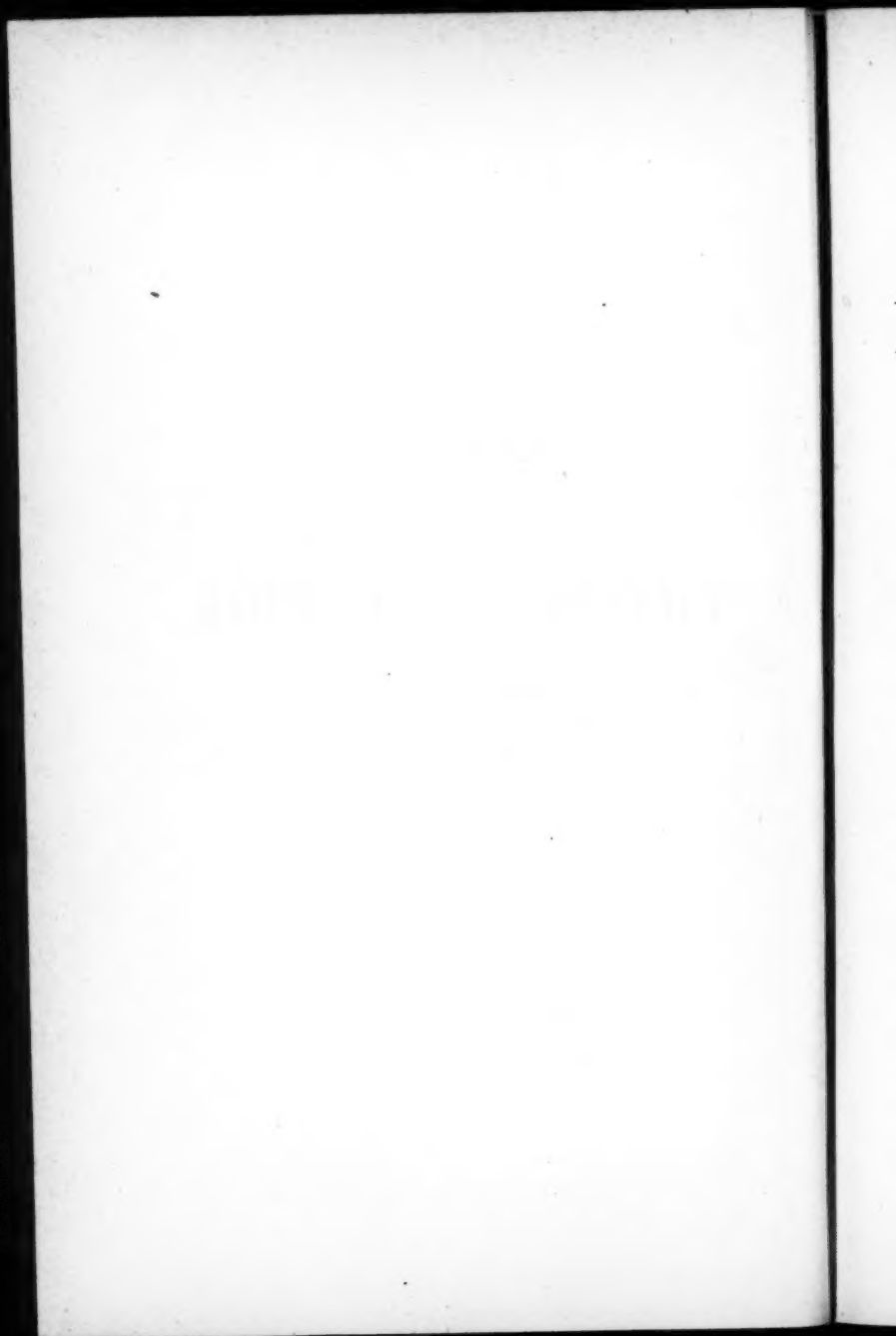


ANNALEN  
DER  
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND IV.





**ANNALEN**  
DER  
**PHYSIK UND CHEMIE.**

**NEUE FOLGE.**

**BAND IV.**

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT UND VIERZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

**H. HELMHOLTZ**

HERAUSGEGEBEN VON

**G. WIEDEMANN.**

NEBST DREI FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1878.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

---

---

I.

O

mi

Ge

br

se

au

sc

Ja

el

d

g

te

T

a

S

V

J



## DER PHYSIK UND CHEMIE.

## NEUE FOLGE BAND IV.

---

I. *Ueber die Ermittlung von Lichtbrechungsverhältnissen durch Totalreflexion; von F. Kohlrausch<sup>1)</sup>.*

---

## I.

Obwohl von keinem Vorschlage die Zweckmässigkeit unmittelbarer einleuchten dürfte, als von Wollaston's<sup>2)</sup> Gedanken, die Totalreflexion zur Messung von Lichtbrechungsverhältnissen zu verwenden, so hat man doch seit Wollaston selbst, trotz der Einfachheit seiner fein ausgedachten Vorrichtung, lange Zeit von diesem Vorschlage nur wenig Gebrauch gemacht. Erst in den letzten Jahren haben Christiansen<sup>3)</sup>, dann Abbe<sup>4)</sup> in seinem eleganten Refractometer, endlich fast gleichzeitig E. Wiedemann<sup>5)</sup> und Terquem und Trannin<sup>6)</sup> Methoden ausgedacht, um die Totalreflexion in dünnen Flüssigkeitsschichten für den genannten Zweck anzuwenden. Die Herren Terquem und Trannin entwickeln zugleich die Gründe, aus denen die ursprüngliche Wollaston'sche Methode an Schwierigkeiten oder an ungenügender Schärfe leidet.

---

1) Grossentheils in der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg vorgetragen am 23. Juni 1877. Vergl. Sitzungsber. 1877.

2) Philos. Trans. 1802. p. 365.

3) Pogg. Ann. CXLIII. p. 251.

4) „Neuere Apparate zur Bestimmung des Brechungsvermögens etc.“ Jena 1874.

5) Arch. sc. phys. LI. p. 340. Pogg. Ann. CLVIII. p. 375.

6) Pogg. Ann. CLVII. p. 302.

Für feste Körper hat E. Wiedemann (l. c.) ein genaues Verfahren angegeben. Man bringt den Körper in Gestalt einer sehr dünnen Planparallelplatte in eine stärker brechende Flüssigkeit von bekanntem Brechungsverhältniss. Auf die Platte fällt ein paralleles Lichtbündel, welches nach seinem Durchgange durch die Platte mit einem Fernrohre beobachtet wird. Man bestimmt, indem man die Platte dreht, den Einfallswinkel, bei welchem die totale Reflexion beginnt, die an der plötzlichen Verdunkelung des Bildes erkannt wird. Es ist aber nicht etwa nothwendig, den Winkel zwischen der Visirrichtung und der Platte direct zu messen, worin eben die Schwierigkeit und Ungenauigkeit bei Wollaston besteht, sondern man stellt die Platte einmal durch eine Neigung nach links, sodann durch eine Neigung nach rechts auf das Verschwinden des Bildes ein; die Hälfte des Winkels zwischen diesen beiden Stellungen ist der Grenzwinkel der totalen Reflexion zwischen der Flüssigkeit und der Platte.

Durch das beschriebene Verfahren wird nicht nur der Winkelmessung jede Schwierigkeit genommen, sondern man vermeidet auch eine lästige Zugabe zu dem Wollaston'schen Verfahren, nämlich das Ankleben des Körpers an ein Prisma.

Andererseits büst man aber auch wesentliche Vortheile des Verfahrens ein. Denn instrumentell wird wieder der ganze Spectrometerapparat gefordert. Die Anwendung durchfallenden Lichtes schliesst die undurchsichtigen Körper aus. Endlich aber wird, wie Wiedemann zeigt, ein äusserst dünner Schliff verlangt, wenn nicht erhebliche Fehler entstehen sollen; ein Schliff, welcher meist überhaupt nicht, fast immer aber schwieriger, als der eines Prismas ausführbar sein wird. Daher empfiehlt Wiedemann selbst dieses Verfahren nur für Körper, welche schon in dünnen Platten vorliegen, oder solche, aus denen Prismen sich nicht herstellen lassen.

Ich denke nun zu zeigen, dass man die Totalreflexion auch bei festen Körpern in einfachster und jeder Genauig-

keit fähiger Weise zur Bestimmung von Brechungsverhältnissen anwenden kann, indem man, unter Beibehaltung der Wiedemann'schen Drehung in einer stärker brechenden Flüssigkeit, zu der Wollaston'schen Beobachtung im reflectirten diffusen Lichte zurückkehrt. Die entstehende Methode leistet dann für feste Körper vollständig das, was von der Abbe'schen Methode für die Flüssigkeiten geleistet worden ist; ja, mit einer ganz einfachen Vorrichtung wird das kleine Instrument auch für Flüssigkeiten brauchbar. Die Interferenzstreifen des durchfallenden Lichtes an der Grenze fallen fort, und vor allem kommt der Vorthail der Wollaston'schen Methode wieder zur Geltung, dass auch undurchsichtige Substanzen untersucht werden können.

Man bedarf dabei nur eines einzigen ebenen Anschliffes des Körpers; ist der letztere ein optisch einaxiger Krystall, so erhält man die Hauptbrechungsverhältnisse aus einer beliebigen Ebene. Desgleichen liefert ein beliebiger Schliff oder eine natürliche Fläche bei einem zwei-axigen Krystall das grösste und das kleinste Brechungsverhältniss und ein Schliff in einem optischen Hauptschnitt die drei Hauptbrechungsverhältnisse.

Vorausgesetzt wird natürlich, dass man über eine Flüssigkeit verfügt, welche stärker bricht, als der Körper. Ich habe mich auf Brechungsvermögen unterhalb des Schwefelkohlenstoffes (1,63 für D) beschränkt. Unter einigen Vorsichtsmaassregeln könnte man auch eine Phosphorlösung in Schwefelkohlenstoff anwenden, welche nach Dale und Gladstone  $n = 1,95$  für D besitzt<sup>1)</sup>. Wie mir Hr. Friedländer mittheilte, ist auch im Phenylsulfid eine ähnlich stark brechende Flüssigkeit gegeben.

Der Schwefelkohlenstoff, welchen ich einstweilen allein benutzt habe, eignet sich durch seine Neutralität den meisten Substanzen gegenüber, durch seine Reinlichkeit beim Arbeiten und seine ausgezeichnete optische Unver-

1) Philos. Trans. CLIII. p. 341. 1863.

änderlichkeit in vorzüglicher Weise. Man kann Krystalle, welche an der Luft in kurzer Zeit angegriffen werden, tagelang in der Flüssigkeit untersuchen; der Schwefelkohlenstoff selbst zeigte nach längerer Benutzung keine Veränderung seines Brechungsverhältnisses, welche 2 Einheiten der 4. Decimale erreichte.

Freilich verlangt die grosse Veränderlichkeit des Brechungsvermögens mit der Temperatur eine genaue Beobachtung der letzteren Grösse.

Von instrumentellen Hilfsmitteln wird nichts verlangt, als ein Fläschchen mit einer ebenen Wand, ein Theilkreis mit Alhidade, an deren Drehungsaxe ein geeigneter Halter für die Objecte angebracht ist, und ein Mittel, um die Sehrichtung nach dem Object zu fixiren. Am einfachsten dient hierzu ein kleines, auf unendlich eingestelltes, schwach vergrösserndes Fernrohr mit Fadenkreuz. Mit einer derartigen Vorrichtung sind die später (unter VIII) mitgetheilten Resultate erhalten worden.

Ich gehe gleich dazu über, das Instrument, welches ich für eine genaue und bequeme Beobachtung construirt habe, zu beschreiben. Dasselbe verdient wohl einen besonderen Namen, und ich erlaube mir, es als Totalreflectometer zu bezeichnen.

Da das Instrument und die Beobachtungsweise einiges Ungewohnte enthalten, und da auch Nichtphysiker sich der Bestimmungsweise mit Vorthail bedienen können, so glaube ich, in der Beschreibung etwas eingehend verfahren zu sollen.

## II. Das Totalreflectometer.

Die mechanische Herstellung des Instrumentes Taf. I Fig. 1 bis 3a) verdanke ich der Werkstätte des Herrn Universitätsmechanikus A pel in Göttingen, welcher seitdem auch für andere Physiker Exemplare ausgeführt hat.

In der hier zu beschreibenden Gestalt ist das Reflectometer nur für Beobachtungen in einfarbigem Lichte bestimmt.

In Taf. I Fig. 1 sind die Bestandtheile des Instruments getrennt von einander in  $\frac{1}{3}$  natürlicher Grösse abgebildet.

Dem eisernen Gestell *a* wurde die Gestalt in Taf. I Fig. 1 aus folgenden Gründen gegeben. Der ausgeschnittene Fuss gestattet, die Beleuchtungslampe und etwaige Schirme beliebig zu nähern. Die 28 cm hohe Säule ist so abgeschrägt, dass sie die Beleuchtungsrichtungen möglichst wenig beschränkt; die beiden schrägen Seitenflächen bilden einen Winkel von  $66^\circ$  mit einander, so dass man nur an einer von ihnen einen schwarzen Spiegel zu befestigen braucht, wenn man zu irgend einem Zwecke polarisirtes Licht bedarf.

Der eiserne Ring *b*, welcher mit einem unten angegossenen seitlichen Vorsprung auf die Säule aufgeschraubt ist, dient zum Tragen des Theilkreises (vgl. unten).

Der Theilkreis *c* mit Alhidade und Objectträger *d* (vgl. auch Taf. I Fig. 2 im Durchschnitt), welcher letztere in der durchbohrten conischen Drehungsaxe verschoben werden kann, hat an dem ausgeführten Instrument einen Durchmesser von 10 cm. Die in Zehntelgrade getheilten Nonien<sup>1)</sup> erlauben die Einstellung der Alhidade bis auf einige Hundertel des Grades zu schätzen. Diese Dimensionen reichen aus, wenn die Winkelablesung eine Genauigkeit des Brechungsverhältnisses auf einige Einheiten der 4. Decimale ergeben soll, welche für die meisten praktischen Bedürfnisse genügt, und welche einer Temperaturbeobachtung des Schwefelkohlenstoffs auf etwa  $0,2^\circ$  entspricht.

Das etwa  $1\frac{1}{2}$  mal vergrössernde Fernröhrchen *e* hat eine Objectivöffnung von etwa 6 mm, eine Länge von 40 mm. Zum Visiren dient ein Fadenkreuz oder bei dop-

1) Seitdem man die vortrefflichen fünfstelligen Tafeln von Bremiker hat, welche die Minutentheilung des Grades mit der Hundertheilung vertauscht haben, erscheint es unzweckmässig, kleinere Theilungen nach Minuten zu beziffern.

pelt brechenden Substanzen eine Mikrometertheilung (vgl. unter V), um den Unterschied der zwei Strahlen genauer ablesen zu können, als es die Kreistheilung bei gesonderter Einstellung beider Grenzen gestattet. Mittels eines aufgeschnittenen Stieles  $f$  kann man das Fernrohr an einem Träger  $g$  längs einer Führung auf- und niederschieben. Die genaue Visirrichtung auf die Drehungsaxe des Instrumentes (vgl. unter III) wird vermöge dreier Schrauben in dem Träger<sup>1)</sup> bewirkt, an deren abgerundete Spitzen der Fernrohrstiel durch eine Zugschraube mit Mutter angedrückt wird.

Der Kreis kann an den eisernen Ring in zwei um  $90^\circ$  verschiedenen Stellungen angeschraubt werden, so dass das Fernrohr entweder nach der Säule gerichtet ist oder dieselbe links liegen lässt.

Als Objectträger kann in die centrirte Durchbohrung des drehbaren Conus eingesetzt werden erstens ein mit zwei Kugelgelenken versehener Halter  $d$  (Taf. I Fig. 1), an welchen nach der Natur des Objectes eine kleine Zange oder eine Doppelspitze (zum Aufstecken eines Korkes) angeschraubt werden kann.

Ein zweiter Objectträger  $h$  für bequemere Orientirung ist Taf. I Fig. 2 in zwei Stellungen abgebildet. Derselbe besteht aus einer Platte mit einem Fensterchen, dessen Wände vorn abgeschrägt und möglichst zugeschärft sind, um noch sehr seitlichem Lichte den Zutritt zu ermöglichen. Die Vorderwand des Fensters ist geschwärzt. Die Rückwand ist eben abgehobelt und für manche Objecte zweckmässig vergoldet. Die Rückwand soll der Drehungsaxe parallel sein, zu welchem Zwecke mit den drei Schrauben am Kopfe, gegen welche der Kopf durch eine starke Spiralfeder angedrückt wird, nachgeholfen werden kann.

Die Objectplatte wird durch eine Feder  $i$ , nöthigen-

1) Diese Befestigung des Fernrohres ist dem vortrefflichen kleinen Meyerstein'schen Spectrometer entlehnt.

falls mit Unterlegung eines Korkes, an die Hinterwand des Fensters angedrückt.

In der Mitte des Fensters kann ein verticaler Faden gespannt werden, den man mittels der Correctionsschrauben am Kopfe genau in die Drehungsaxe bringen kann. Verzichtet man auf den Gebrauch dieses Fadens (vgl. unter III), so ist die Correctionsvorrichtung nicht nöthig.

Das Fläschchen  $k$  endlich, welches die Flüssigkeit aufnimmt, ist an seinem dickwandigen Bauche eben angeschliffen und mit einem angekitteten Stück Spiegelglas bedeckt. Dickflüssiges Gummi arabicum hält als Kitt gegen Schwefelkohlenstoff sehr gut.

Am Theilkreise wird das Fläschchen durch einen Bajonnettverschluss mit drei flachköpfigen Schrauben befestigt, welche genau in die Einschnitte der an das Fläschchen gekitteten Messingfassung einpassen. Die Form der Einschnitte ermöglicht das Ansetzen des Fläschchens ohne viel Probiren.

An den Kreis kann ein kleines Thermometer angehängt werden.

Um zerstreutes Licht im Fläschchen zu erhalten, umgibt man das letztere mit Ausnahme der ebenen Wand mit stark durchscheinendem Oelpapier, welches mit etwas Wachs angeklebt wird. Passende Blenden dienen dazu, falsches Licht und strahlende Wärme möglichst abzuhalten. Insbesondere muss der Hintergrund des Fläschchens dunkel sein.

Schlecht spiegelnde oder nicht ganz ebene Objecte lassen im Fernrohre die Grenze der totalen Reflexion schwierig erkennen. Durch theilweise Abblendung des Objectivs kann man allerdings nachhelfen; in einzelnen Fällen aber beobachtet man besser mit blossem, auf unendlich accomodirtem Auge. Um hierbei zugleich eine unendlich entfernte Marke zum Visiren zu haben, wird anstatt des Fernrohres ein Rohr mit einem Faden hinter einer kleinen halben Linse (Taf. I Fig. 3) eingesetzt. Das Auge kann alsdann zugleich direct nach der spiegelnd-



den Fläche und durch die Linse nach dem Faden blicken. Auch der centrirte Faden des zweiten Objectträgers kann mit vorgesetzter, sehr kleiner Linse den Visirgegenstand vorstellen.

Das beschriebene Instrument sucht den Bedürfnissen zu genügen, welche etwa als diejenigen des Mineralogen und Krystallographen oder des praktischen Optikers charakterisirt werden können. Es steht nichts im Wege, dasselbe Verfahren zu einer grösseren Feinheit auszubilden. Zu diesem Zwecke wird zunächst ein grösserer Theilkreis verlangt, auch lässt sich ein grösseres Fernrohr verwenden, da fehlerfreie Objecte vorausgesetzt werden. Um die Dispersion zu bestimmen, würde, abgesehen von der möglichen Verwendung von Lithium-, Natrium- und Thalliumlicht, ein Spectroskop als Ocular sich empfehlen. Auf einzelne Spectrallinien einzustellen, würde eine Abänderung des Verfahrens voraussetzen. Ohne Schwierigkeit aber würde das sinnreiche Abbe'sche Ocular aus zwei geradsichtigen Prismen zur Bestimmung der Gesamtdispersion anwendbar sein.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass das Instrument auch als Reflexionsgoniometer, sowie als Axenwinkelapparat für Krystalle ohne Mühe eingerichtet werden kann.

### III. Das Einstellungsverfahren.

Zuerst wird das Fernrohr so eingestellt, dass das Fadenkreuz (oder die Theilung) deutlich erscheint und gegen das Bild eines entfernten Gegenstandes keine Parallaxe zeigt.

Um sodann das Fernrohr parallel zum Theilkreise zu richten, legt man über den letzteren ein Lineal, visirt nach einem entfernten Object und bestimmt so einen Punkt des letzteren, welcher in der Ebene des Theilkreises liegt. Auf die Höhe dieses Punktes corrigirt man die Stellung des Fernrohres mit der oberen und unteren



Schraube des Fernrohrträgers. Dieses Verfahren genügt vollständig.

Ebenso reicht es aus, die Fernrohraxe in folgender Weise auf die Drehungsaxe des Instrumentes zu richten. Man setzt den zweiten Objectträger (vgl. p. 6 u. Taf. I Fig. 2) ein, welcher inmitten des Fensterchens den Verticalfaden trägt. Freilich kann man den Faden bei seinem geringen Abstände von dem auf unendlich eingestellten Fernrohr nicht unmittelbar sehen, wohl aber, indem man vor das Fernrohr eine Linse setzt (z. B. kann man in die Hülse, welche das Fernrohr trägt, das zweite Rohr mit der halben Linse einschieben) und der Deutlichkeit nöthigenfalls noch durch Ausziehen des Ocularrohres nachhilft. Mit den drei Schrauben des Objectträgers corrigirt man, wenn nothwendig, zunächst den letzteren so, dass der Faden im Fenster bei dem Herumdrehen der Alhidade seine Stellung nicht ändert.

Alsdann entfernt man die Linse von dem Rohre und visirt nach dem Faden, indem man eine Lupe zwischen Auge und Fernrohr hält. Das Bild des Fadens muss in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheinen, bezw. man stellt das Fernrohr mit den Correctionsschrauben seines Trägers so auf das Bild ein. Dabei corrigirt man an beiden Schrauben gleich viel, um die Horizontalstellung nicht wieder zu verderben.

Sind die letzten Drehungen an den Schrauben beträchtlich gewesen, so prüft man die Horizontalstellung noch einmal, bezw. corrigirt dieselbe wiederum. Eine zweimalige Wiederholung der Operation führt immer genügend genau zum Ziele, da die Einstellung des Fernrohrs auf die Drehungsaxe nur genähert zu sein braucht.

Aus letzterem Grunde genügt es auch, das Fernrohr nach dem Augenmaass, etwa indem man vor der Mitte des Objectivs und des Oculars je ein Senkel herabhängen lässt und längs der Senkel visirt, auf die Drehungsaxe zu richten.

Die spiegelnde Fläche des Objectes soll der Drehungsaxe parallel sein und muss bei der Untersuchung kleiner Flächen auch nahe in der Drehungsaxe liegen, damit man bei den schrägen Stellungen noch hinreichend Licht bekommt.

Im allgemeinen wird es genügen, die Fläche hinter das Fenster des zweiten Objectträgers (p. 6) zu legen.

Bei Anwendung der Kugelgelenke richtet man die Objectfläche zuerst nach dem Augenmaass in die verlangte Stellung, welche Aufgabe durch eine verticale Schneide, die man in der Fortsetzung der Drehungsaxe befestigt, erleichtert wird.

Behufs genauerer Prüfung, ob die spiegelnde Fläche der Drehungsaxe parallel ist, nimmt man zwei ferne Objecte, die in der Kreisebene, aber einander nicht zu nahe liegen. Visirt man nach dem einen Objecte direct, neben der spiegelnden Fläche vorbei, so muss das Spiegelbild des anderen in der Höhe des ersteren erscheinen. Mit dem bereits orientirten Fernrohr visirt man einfach nach dem Spiegelbilde eines seitlich in der Kreisebene gelegenen fernen Objectes. Dieses Bild muss bei passender Stellung der Alhidade im Fadenkreuz erscheinen.

Ein drittes Verfahren wäre noch das folgende. Man legt über den Theilkreis ein steifes Lineal, von welchem zwei Senkelfäden herabhängen. Dieselben tragen in der Höhe der Objectplatte je eine Marke in gleichem Abstände vom Lineal. Visirt man mit blossen Auge längs der Marken auf die Objectplatte, so muss bei geeigneter Stellung der Alhidade das Spiegelbild des Auges in der Visirlinie erscheinen.

Ueber die bei diesen Operationen verlangte Genauigkeit vgl. unter VII.

#### IV. Die Messung des Grenzwinkels.

Nachdem das Fläschchen mit der stark brechenden Flüssigkeit über das orientirte Object übergesteckt worden ist, beleuchtet man die transparente Umhüllung auf der

einen Seite, z. B. der linken, mit der Natriumflamme, wobei der Hintergrund des Fläschchens mittels eines Schirmes dunkel erhalten wird. Nun bringt man das auf grosse Entfernung accommodirte Auge dicht vor die ebene Glaswand und dreht die Objectfläche mit der Alhidade in eine so nach links rückwärts geneigte Stellung, dass die Grenze erscheint, welche den linken hellen Theil des total reflectirten Lichtes von dem rechts liegenden nicht total reflectirten scheidet. Ist das Object eben und gut spiegelnd, so erscheint diese Grenze vollkommen scharf. Vorausgesetzt aber wird, wie gesagt, dass das Auge auf unendlich accommodirt sei (nicht etwa die Krystallfläche fixire), wozu für ein kurzsichtiges Auge stets, aber bei der bekannten Gewohnheit auch des normalen Auges, eine kürzere Sehweite zu fixiren, auch für ein solches oft eine Zerstreuungslinse nöthig ist.

Ebenso verfährt man dann auf der rechten Seite.

Nachdem man sich so überzeugt hat, dass und in welcher Stellung der Alhidade ungefähr eine Grenze erscheint (d. h. dass nicht etwa das Object stärker bricht, als die Flüssigkeit), und dass diese Grenze vertical verläuft, wenn man horizontal visirt, was bei einem isotropen Object stets der Fall sein muss, so setzt man das Fernrohr ein. Nun bringt man mit der Alhidade auf der linken und auf der rechten Seite die Grenze in die Visirlinie und liest jedesmal das Thermometer in der Flüssigkeit und die Stellung der Nonien ab. Der Winkel  $\varphi$ , um welchen man zwischen diesen beiden Einstellungen drehen muss, ist der doppelte Grenzwinkel der totalen Reflexion zwischen dem Object und der Flüssigkeit.

Wenn also  $N$  das Lichtbrechungsverhältniss der Flüssigkeit für das Mittel aus den beobachteten Temperaturen ist, hat man dasjenige des Objectes:

$$n = N \sin \frac{\varphi}{2}.$$

$N$  wird auf gewöhnliche Weise mit dem Hohlprisma ermittelt oder auch mit dem Instrumente selbst, indem

man einmal ein Object (Glasplatte) von bekanntem Brechungsverhältniss nimmt. Vgl. hierüber auch VI.

Die von mir angewandten Schwefelkohlenstoffe hatten bei 20° gegen Natriumlicht Brechungsverhältnisse zwischen 1,6274 und 1,6280; Dale und Gladstone geben 1,6262 an, aus den Beobachtungen von Wüllner würde 1,6274 folgen. Begnügt man sich mit einer in der dritten Decimale noch zuverlässigen Bestimmung von  $n$ , so wird man für jeden Schwefelkohlenstoff  $N_{20} = 1,6274$  setzen dürfen.

Die sehr grosse Abnahme des Brechungsverhältnisses mit der Temperatur beträgt auf 1°:

nach Dale und Gladstone . .	0,00082,
„ Wüllner . . . . .	0,00080,
„ meinen Beobachtungen . .	0,00080,

so dass man die letztere Zahl für die Temperaturreductionen unbedenklich gebrauchen kann. Und zwar ist diese Aenderung innerhalb der vorkommenden Temperaturen als constant anzunehmen.<sup>1)</sup>

Ueber die praktische Ausführung der Beobachtungen dürften noch einige Winke am Platze sein.

Selbstverständlich wird die Beobachtung im dunkelen Raume erleichtert. Auch die Umgebung des Objectes, die Zange oder den Kork, worin es gehalten wird, schwärzt man zweckmässig. Tusche wird von Schwefelkohlenstoff durchaus nicht angegriffen. Ist das Object durchsichtig, so schwärzt man auch seine sonstigen Flächen.

Die günstigste Stellung der Flamme und der Schirme für ein möglichst scharfes Auftreten der Grenze muss durch Probiren ermittelt werden. Bei genauen Beobachtungen blende man alles unnöthige Licht ab.

Um die Temperatur nicht unnöthig zu steigern, wird man die Flamme nur während der Einstellungen in der Nähe des Instrumentes halten. Zweckmässig zur Abhaltung strahlender Wärme ist ein Verschluss der Schirmöffnung mit dickem Glase. Wollte man eine Genauigkeit

1) vgl. Wüllner, Pogg. Ann. CXXXIII. p. 31.

über die vierte Stelle hinaus verbürgen, so sind weitere Maassregeln, z. B. die Einschaltung von Alaun- oder Wasserschichten, erforderlich.

Wegen der Behandlung empfindlicher Objecte ist endlich noch zu beachten, dass nach dem Ausheben aus dem Schwefelkohlenstoff durch Verdunstung des letzteren alsbald eine Temperaturverminderung eintritt, welche meistens zur Thau- oder Reifbildung führt. Deswegen bringe man solche Objecte ohne Zeitverlust unter den Exsiccator. Dass man andererseits Körper mit Krystallwasser nicht zu lange im Exsiccator lassen darf, ist selbstverständlich.

#### V. Die Behandlung von Krystallen.

Die optische Untersuchung der Krystalle gestaltet sich mit dem Totalreflectometer zu einer höchst einfachen Arbeit, denn es genügt für reguläre und optisch einaxige Krystalle eine beliebig gelegene, z. B. eine natürliche spiegelnde Fläche, für zweiaxige Krystalle genügt eine in einem Hauptschnitt gelegene Fläche.

Ueber reguläre Krystalle ist nichts zu bemerken, da sie keine andere Behandlung verlangen als ein amorpher Körper.

Nicht reguläre Krystalle lassen im allgemeinen, den zwei Brechungsverhältnissen jeder Strahlenrichtung entsprechend, zwei Grenzen der totalen Reflexion erscheinen. Diese beiden Grenzen gehören natürlich zweien senkrecht auf einander polarisirten Lichtwellen an. Die Richtung der Schwingung eines jeden Strahles lässt sich mit einem Nicol'schen Prisma erkennen, das man vor das Auge hält und dreht. Jede Grenze verschwindet nämlich bei einer bestimmten Stellung des Nicol's vollständig, während die andere Grenze alsdann am kräftigsten auftritt. Die Richtung der grösseren Diagonale des Nicol's zeigt die Polarisationsebene desjenigen Strahles an, dessen Reflexionsgrenze bei dieser Stellung des Nicol's möglichst hell erscheint.

## Optisch einaxige Krystalle.

1. Ist die Fläche senkrecht zur Axe geschliffen, so liefert irgend eine Beobachtungsrichtung die beiden Hauptbrechungsverhältnisse. Der horizontal polarisirte Strahl ist der ordentlich gebrochene.

2. Ist die Fläche der Axe parallel, so erscheint, wenn die optische Axe horizontal liegt, nur eine Grenze, welche dem ordentlich gebrochenen Strahle entspricht.

Wenn die Axe vertical liegt, so erhält man die beiden Hauptbrechungsverhältnisse. Der ordentliche Strahl erscheint vertical polarisirt.

3. Eine beliebig gelegene Fläche liefert natürlich in jeder Richtung den ordentlichen Strahl. Jede Fläche enthält aber auch eine auf der optischen Axe senkrechte Richtung (z. B. die Halbierungslinie des spitzen Winkels in der Spaltfläche des Kalkspaths oder des Natronsalpeters, in der Quarzpyramidenfläche die Richtung der Grundlinie des Dreiecks). Stellt man diese Richtung horizontal, so liefert die Beobachtung der beiden Grenzen die beiden Hauptbrechungsverhältnisse. Der ordentliche Strahl ist hierbei derjenige, dessen Polarisationssebene mit der vom beobachtenden Auge gesehenen Hauptaxe zusammenfällt.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass man auch ohne krystallographische Anhaltspunkte die fragliche Richtung rein optisch bestimmen kann; denn es ist diejenige Richtung, in welcher der Unterschied zwischen dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Strahle ein Maximum ist. Mittels einer Vorrichtung, welche die Krystallfläche in ihrer eigenen Ebene innerhalb der Flüssigkeit zu drehen gestattet, kann man diese Richtung leicht feststellen.

Wenn man nun ausserdem noch das Brechungsverhältniss des ausserordentlichen Strahles in einer Richtung senkrecht zu der genannten bestimmt, so ergibt sich die interessante Möglichkeit, auch die Lage der Fläche gegen die optisch-krystallographische Hauptaxe zu berechnen. Wenn nämlich  $\omega$  und  $\varepsilon$  das ordentliche und

ausserordentliche Hauptbrechungsverhältniss,  $\epsilon'$  aber das Brechungsverhältniss des ausserordentlichen Strahles in der genannten senkrechten Richtung (wo der Unterschied gegen  $\omega$  ein Minimum ist) bedeutet, so wird der Winkel  $\alpha$  der Fläche mit der Hauptaxe, wie man leicht ableiten kann, gegeben durch:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\epsilon'^2 - \omega^2}{\epsilon^2 - \omega^2}.$$

Es ist nicht nur von Interesse, sondern von praktischer Bedeutung, dass eine einzige Krystall- oder Schlifffläche, über deren Lage von vornherein gar nichts bekannt ist, erkennen lässt, ob der Körper regulär, ob hexagonal oder quadratisch, oder ob er in einem der übrigen Systeme krystallisirt. In dem Falle, dass man es mit einem der optisch einaxigen Systeme zu thun hat, ergeben sich die optisch elastischen Eigenschaften des Krystalles aus einem einzigen Splitter mit einer Fläche in erschöpfender Weise; und endlich findet man noch die Lage der Fläche gegen die Hauptaxe.

#### Optisch zweiaxige Krystalle.

Die sich hier bietende Aufgabe ist gelöst, sobald man die Hauptbrechungsverhältnisse und die Lage der Elasticitäts-Hauptaxen kennt.

Auch für zweiaxige Krystalle liegt principiell die Möglichkeit vor, aus Beobachtungen in einer einzigen, beliebig gelegenen Fläche die genannte Aufgabe zu erledigen, wie Herr Brill, welcher die Rechnung durchführte, mir bestätigte. Die Eliminationen scheinen aber eine zu verwickelte Rechnung zu verlangen, als dass man praktisch von dieser Möglichkeit Gebrauch machen wird.

Andererseits sieht man aber sofort, dass die zwei wichtigsten der Constanten, nämlich das grösste und



das kleinste Hauptbrechungsverhältniss sich aus jeder Fläche durch Probiren finden lassen. Dies folgt daraus, dass die Hauptlichtgeschwindigkeiten in der Fresnel'schen Wellenfläche auf Kreisen vertreten sind, welche von jeder hindurchgelegten Ebene nothwendig geschnitten werden.

Ich beschränke mich hier darauf, die optischen Constanten an einem Körper zu bestimmen, welcher eine mit einem optischen Hauptschnitt (der Ebene zweier optischer Elasticitätsaxen) parallele Ebene besitzt.

In der Regel wird dies diejenige Ebene sein, welche das bekannte optische Axenbild zeigt, d. h. zur ersten Mittellinie der optischen Axen senkrecht steht. In diesem Falle ist die Verbindungslinie der beiden Axenbilder die eine, die darauf senkrechte Gerade die andere Elasticitätsaxe. Wird die Krystallplatte in dem Reflectometer so befestigt, dass die Ebene der optischen Axen horizontal liegt, so liefert die Beobachtung der beiden entstehenden Grenzen zwei Hauptbrechungsverhältnisse. Horizontal polarisirt ist das mittlere Brechungsverhältniss. Ist dasjenige des anderen, vertical polarisirten Strahles grösser, so ist der Krystall positiv, und umgekehrt.

Wird die Verbindungsebene der optischen Axen vertical eingesetzt, so erhält man das grösste und das kleinste Brechungsverhältniss. Horizontal polarisirt erscheint im positiven Krystall der Strahl vom kleinsten Brechungsverhältniss, und umgekehrt.

Abgesehen von der Polarisationsrichtung wird also ein positiver Krystall daran erkannt, dass bei ihm das grösste der drei Brechungsverhältnisse zweimal gewonnen wird, und umgekehrt.

Ein Schliff in einer anderen Hauptebene wird selten vorliegen. Er wird mit den entsprechenden Modificationen ebenso behandelt, wie eben angegeben wurde. Die Lage der optischen Elasticitätsaxen wird im Nörremberg'schen Apparate erkannt. Macht man nämlich das Gesichtsfeld dunkel und bringt dann die Krystallplatte in den Apparat,

so v  
Stell  
der  
Pola

An w

hält  
Gesie  
von  
brau  
verm  
schie  
fehle  
schie  
entsp  
verh  
Fehl  
kohl

hält  
Thei  
man  
klein  
obac  
lesu

einfa  
linie  
des  
thei  
Win

schie  
gew  
je n  
A



so wird das Gesichtsfeld im allgemeinen erhellt. Die Stellungen grösster Dunkelheit entsprechen einer Lage der beiden Elasticitätsaxen senkrecht und parallel zur Polarisationssebene des Analysators.

#### Anwendung der Mikrometerscala bei Krystallen.

Meistens sind die Unterschiede der Brechungsverhältnisse so gering, dass beide Grenzen gleichzeitig im Gesichtsfelde erscheinen. Dann kann man mit Vortheil von einer Mikrometerscala im Ocular des Fernrohrs Gebrauch machen, deren Winkelwerth bekannt ist. Man vermeidet nämlich dadurch bei der Bestimmung des Unterschiedes der beiden Brechungsverhältnisse den Ablesungsfehler am Kreise. Die genaue Kenntniss dieses Unterschiedes aber ist häufig von grösserer Bedeutung, als eine entsprechend genaue absolute Kenntniss des Brechungsverhältnisses. Auch fällt bei der Scalenbeobachtung die Fehlerquelle der wechselnden Temperatur des Schwefelkohlenstoffes heraus.

Man verfährt dann so, dass man die Brechungsverhältnisse jeder Grenze durch Einstellung auf den mittelsten Theilstrich mit dem Kreise bestimmt. Nachher aber ändert man die gefundenen Resultate durch gleich grosse Verkleinerung des einen und Vergrösserung des anderen beobachteten Winkels  $\varphi$  so ab, dass die Differenz dem Ablesungsunterschiede an der Scala entspricht.<sup>1)</sup>

Den Winkelwerth des Scalentheils ermittelt man am einfachsten durch Visiren nach einem senkrecht zur Visirlinie entfernt aufgestellten Maassstabe. Ist  $L$  der Abstand des letzteren von dem Fernrohr, und bedeckt der Scalentheil im Fernrohr die Länge  $l$  des Maassstabes, so ist der Winkelwerth des Scalentheiles gleich  $\text{arc tang } \frac{l}{L}$ .

1) oder nach Umständen einem Mittelwerthe aus den Unterschieden, welche aus der Scalenbeobachtung und der Kreiseinstellung gewonnen werden, wobei man dem einen und dem anderen Unterschied je nach den Umständen ein verschiedenes Gewicht beilegen kann.

Ebenso kann man das Fernrohr mit einem grösseren Kreise (Spectrometer, Theodolith) drehbar verbinden und den Winkel beobachten, um welchen man drehen muss, um eine entfernte Marke auf verschiedene Theilstriche einzustellen.

Der so gefundene Winkelwerth der Scale bedarf aber für die Beobachtung durch die Flüssigkeit im Fläschchen einer Abänderung, denn es muss die Brechung berücksichtigt werden, welche die Strahlen bei dem Austritte aus der Flüssigkeit in die Luft erleiden. Man sieht leicht, dass zwei Strahlen, welche nach dem Austritte in die Luft den (kleinen) beobachteten Winkel  $\Delta$  mit einander bilden, innerhalb der Flüssigkeit den Winkel:

$$\delta = \frac{\Delta}{N}$$

besessen, wenn  $N$  das Brechungsverhältniss der Flüssigkeit bedeutet. Es sind also durch  $N$  die an der Mikrometerscala beobachteten Richtungswinkel zu dividiren.

#### VI. Die Bestimmung für Flüssigkeiten.

Durch eine sehr einfache Vorrichtung wird das Instrument auch geeignet, um von einem Tropfen Flüssigkeit das Brechungsverhältniss zu bestimmen. Hinter das Fenster des zweiten Objectträgers  $h$  (vgl. p. 6 und Taf. I Fig. 2) kann nämlich ein Paar von Glasplatten (Taf. I. Fig. 3a) gesetzt werden. Die vordere ist sehr dünn, etwa 0,4 mm dick, die hintere dicke Platte ist in einem Durchmesser von 6 mm zu einer flachen Höhlung ausgeschliffen, in welche ein Tropfen der zu bestimmenden Flüssigkeit eingebracht wird. Das Deckgläschen kann leicht luftfrei aufgeschoben werden und haftet alsdann sehr fest.

Da die Planparallelplatte ohne Einfluss auf die Erscheinung der Lichtgrenze ist, (vgl. auch S. 24) so wird die Beobachtung der Flüssigkeit nun gerade so vorgenommen, wie im vorigen Paragraphen für feste Platten angegeben worden ist.

Selbstverständlich muss man sich nicht durch eine Grenze täuschen lassen, welche am Glase selbst auftreten

kann, wenn dasselbe schwächer bricht, als die umgebende Flüssigkeit. Jedenfalls muss das Glas stärker brechen als der Flüssigkeitstropfen. Am zweckmässigsten ist deswegen Flintglas. Meine Platten hat Hr. Dr. Steeg allen Anforderungen entsprechend hergestellt.

Die Gläser müssen gut auf einander schliessen, damit nicht die äussere Flüssigkeit eindringen kann. Ich fand bei einigen Versuchen mit Wasser die Grenze tagelang scharf und in der Lage ungeändert, dagegen wurde die Grenze für Alkohol in kurzer Zeit undeutlich.

Die beschriebene Vorrichtung lässt sich natürlich auch verwenden, um das Brechungsverhältniss  $N$  der Flüssigkeit (Schwefelkohlenstoff) im Fläschchen zu ermitteln. Wenn nämlich der Hohlraum zwischen den Platten mit Luft gefüllt ist, so wird der Grenzwinkel  $\varphi$  der totalen Reflexion durch:

$$N \cdot \sin \varphi = 1$$

bestimmt, woraus  $N$  durch  $\varphi$  gegeben ist. In diesem Falle aber (vgl. §. 24) gibt ein Ablesungsfehler von  $0,01^\circ$  in  $\varphi$  schon zu einem Fehler um 0,0002 in  $N$  (für Schwefelkohlenstoff) Veranlassung.

#### VII. Theorie des Totalreflectometers.

Um das beschriebene Verfahren zur Bestimmung des Grenzwinkels zu übersehen und bezüglich seiner Fehlerquellen einer Kritik zu unterwerfen, wird die folgende Ueberlegung am bequemsten sein.

Von den Strahlen, welche aus allen möglichen Richtungen im Schwefelkohlenstoff auf die Objectplatte fallen, dringen nur diejenigen ein, welche mit dem Einfallslothe einen Winkel kleiner als  $\varphi = \arcsin \frac{n}{N}$  bilden. Die ausserhalb dieses Richtungskegels liegenden Strahlen werden von der Platte total reflectirt.

Da nun das auf unendlich accomodirte Fernrohr oder Auge die Parallelstrahlen jeder Richtung zu einem Bilde zusammenfasst, so können wir für die Einstellung die

Grenze der totalen Reflexion als einen Kegelmantel von dem Oeffnungswinkel  $2\varphi$  ansehen, welcher von dem anvisirten Punkte der Drehungsaxe des Instrumentes ausgeht, und dessen Mittellinie zur Objectplatte senkrecht steht.

Dieser Strahlenkegel bewegt sich bei der Drehung der Alhidade mit herum. Stellen wir so ein, dass die Visirlinie mit einem Strahle des Kegelmantels zusammenfällt, so erscheint das Gesichtsfeld in eine helle und eine weniger helle Hälfte getheilt.

Man sieht sofort, wie der Unterschied  $2\varphi$  der Einstellungen auf beiden Seiten den Oeffnungswinkel des Kegels misst, sobald: 1. die Objectplatte der Drehungsaxe parallel, d. h. die Kegelaxe zur Drehungsaxe des Instrumentes senkrecht ist, 2. auch die constante Visirlinie in der Flüssigkeit auf der Drehungsaxe senkrecht steht.

Man kann nun leicht bestimmen, wie genau die genannten Bedingungen der Orientirung für eine bestimmte, im Resultate verlangte Sicherheit erfüllt sein müssen. Wir wollen im Falle fehlerhafter Orientirung für den gemessenen Winkel die Bezeichnung  $2\varphi$  beibehalten, den richtigen Grenzwinkel aber durch  $\varphi_0$ , also durch  $2\varphi_0$  den Kegelwinkel bezeichnen.

1. Wenn die Objectfläche nicht der Drehungsaxe parallel ist, sondern mit derselben den Winkel  $\alpha$  bildet, so stellt dieser Winkel auch die Neigung der Kegelaxe gegen die Drehungsebene dar. Dann messen wir also anstatt des gesuchten Oeffnungswinkels  $2\varphi_0$  des Kegels den kleineren Winkel  $2\varphi$ , in welchem eine durch die Kegelspitze gelegte Schnittebene von der Neigung  $\alpha$  gegen die Axe den Kegel schneidet.

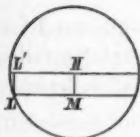


Fig. 1.

Nebstehender Kreis (Fig. 1) stelle den Grundkreis des Kegels vor, welcher zu einer Höhe  $h$ , zu einer Mantellänge  $l$  gehört, so dass:

$$\frac{h}{l} = \cos \varphi_0.$$

$LM$  sei die Schnittlinie der um  $\alpha$  geneigten, durch die Spitze gelegten Ebene mit dem Grundkreis. Bedeutet  $m$  den Abstand des Punktes  $M$  von der Spitze, so ist offenbar:

$$\frac{h}{m} = \cos \alpha, \quad \frac{m}{l} = \cos \varphi,$$

also:

$$\cos \varphi_0 = \cos \varphi \cos \alpha,$$

oder:

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass  $\alpha$  immer klein ist, kann man hierfür schreiben:

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}.$$

Bedeutet nun  $n$  das beobachtete,  $n_0$  das fehlerfreie Brechungsverhältniss,  $\Delta n$  den Betrag, um welchen das erstere zu vermehren ist, so stellt sich der in Bruchtheilen des ganzen ausgedrückte Fehler dar durch:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}{\sin \varphi},$$

oder:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\alpha^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Man kann hierfür auch schreiben, indem man das Brechungsverhältniss  $N$  der Flüssigkeit einführt:

$$\Delta n = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{N^2 - n^2}{n}.$$

2. Es sei zwar die Objectfläche richtig gestellt, dagegen bilde die Visirlinie in der Flüssigkeit den Winkel  $\delta$  mit der Drehungsebene. Die betreffende Fehlergleichung findet sich aus Fig. 1 (p. 20) gerade wie früher.

$L$  sei nämlich jetzt der Punkt, welcher mit der Spitze verbunden die Visirlinie gibt. Füllen wir die Senkrechte  $LL'$  auf den horizontalen Durchmesser des Kreises und nennen  $l'$  den Abstand des Punktes  $L'$  von der Spitze des Kegels, so ist offenbar:

$$\frac{h}{l} = \cos \varphi_0, \quad \frac{h}{l} = \cos \varphi, \quad \frac{l'}{l} = \cos \delta,$$

also wieder:

$$\cos \varphi_0 = \cos \varphi \cos \delta,$$

woraus, gerade wie oben, wenn  $\delta$  klein ist, folgt:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\delta^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Es haben also die Neigungen der Visirlinie und der Objectfläche den gleichen Einfluss auf das Resultat.

Die Neigung  $\delta$  der Visirlinie in der Flüssigkeit entspringt aber aus zwei Ursachen, nämlich aus der Neigung  $\beta$  des Fernrohrs gegen die Drehungsebene und der Neigung  $\gamma$  der Planplatte des Fläschchens gegen die Drehungsaxe. Zählen wir den Winkel  $\beta$  vorn nach unten,  $\gamma$  oben nach vorn positiv, so ist jedenfalls:

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma)} = N,$$

wenn  $N$  das Brechungsverhältniss der Flüssigkeit. Mit Rücksicht auf die Kleinheit von  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  erhält man hieraus:

$$\delta = \frac{\beta + \gamma(N-1)}{N}.$$

Die in Bruchtheilen des ganzen Brechungsverhältnisses gemessenen Fehler, welche einzeln aus den fehlerhaften Neigungen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  der Objectfläche, des Fernrohrs und der Deckplatte des Fläschchens entstehen, sind also beziehungsweise:

$$\frac{\alpha^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \varphi, \quad \frac{1}{N^2} \frac{\beta^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \varphi, \quad \left( \frac{N-1}{N} \right)^2 \frac{\gamma^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Um für einen bestimmten mittleren Fall den Fehler in Zahlen zu berechnen, setzen wir  $n = 1,5$ ,  $N = 1,63$  (Schwefelkohlenstoff), also  $\varphi = \arcsin \frac{1,5}{1,63} = 67^\circ$ . Damit das beobachtete Brechungsverhältniss um eine Stelle der vierten Decimale zu klein wird, muss die fehlerhafte Neigung betragen:

$\alpha = 0,027$  oder  $1,7^\circ$ ,  $\beta = 0,044$  oder  $2,5^\circ$ ,  $\gamma = 0,070$  oder  $4^\circ$ , Fehler, welche ohne Mühe vermieden werden.

Als Fehler zweiter Ordnung sind übrigens bei gleichzeitigem Vorhandensein der verschiedenen Fehlerquellen deren Einflüsse nicht von einander unabhängig. Die vollständige Fehlergleichung erhält man folgendermaassen. Um den Schnittpunkt der Visirlinie (in der Flüssigkeit) mit der Drehungsaxe sei eine Kugel vom Halbmesser Eins beschrieben. Diese Kugelfläche werde in  $N$  (Fig. 2) von der Objectnormale, in  $V$  von der Visirlinie getroffen, dann ist, nach erfolgter Einstellung auf die Grenze,  $VN = \varphi_0$  der gesuchte Winkel. Beobachtet aber wird der halbe Drehungswinkel  $\varphi$ , welchen man erhält, wenn man von  $V$  und  $N$  auf die Drehungsebene senkrechte Kreise fällt. Die betreffenden Kreisstücke geben zugleich die Winkel  $\alpha$  und  $\delta$ .

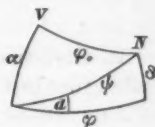


Fig. 2.

Zieht man in dem sphärischen Viereck, welches unten zwei Rechte hat, eine Diagonale  $\psi$ , welche mit dem Bogen  $\varphi$  den Winkel  $d$  bilde, so ist:

$$\cos \psi = \cos \varphi \cos \delta.$$

Ferner:

$$\cos \varphi_0 = \cos \psi \cos \alpha + \sin \psi \sin \alpha \cdot \sin d,$$

oder, da:

$$\sin d = \frac{\sin \delta}{\sin \psi},$$

$$\cos \varphi_0 = \cos \varphi \cdot \cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta.$$

$\alpha$  und  $\delta$  sind kleine Winkel, woraus:

$$\cos \varphi_0 = \cos \varphi \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - \delta^2} + \alpha \delta$$

und mit Vernachlässigung höherer Potenzen und Producte von  $\alpha$  und  $\delta$ , als der zweiten:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_0 &= \cos \varphi - \left( \frac{\alpha^2 + \delta^2}{2} \cos \varphi - \alpha \delta \right) \\ &= \cos \varphi - \sin \varphi \left( \frac{\alpha^2 + \delta^2}{2} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\alpha \delta}{\sin \varphi} \right). \end{aligned}$$



Da nun  $\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \cos\varphi - \Delta\varphi \cdot \sin\varphi$ , und  $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi + \Delta\varphi \cdot \cos\varphi$  ist, so folgt:

$$\sin\varphi_0 = \sin\varphi + \cos\varphi \left( \frac{\alpha^2 + \delta^2}{2} \operatorname{ctg}\varphi - \frac{\alpha\delta}{\sin\varphi} \right).$$

Hieraus ergibt sich dann die Fehlergleichung:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\sin\varphi_0 - \sin\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}^2\varphi \left( \frac{\alpha^2 + \delta^2}{2} - \frac{\alpha\delta}{\cos\varphi} \right),$$

woraus die einzelnen Ausdrücke für  $\alpha = 0$  oder  $\delta = 0$  wie oben erhalten werden.

In ähnlicher Weise zeigt sich auch, dass bei der Anwendung des Instruments auf Flüssigkeiten (vgl. unter VI) aus einer etwas keilförmigen Gestalt des Deckglases nur ein Fehler höherer Ordnung entsteht. Angenommen, dass der Winkel des Keiles  $= \varepsilon$ , und dass der Keil sich in der ungünstigsten Lage, nämlich mit aufrechter Schneide, befinde, so wird der relative Fehler:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\varepsilon^2}{2 \cos^2\varphi} (1 - m^2),$$

wenn  $m$  das relative Brechungsverhältniss aus der umgebenden Flüssigkeit in die Glasplatte darstellt. Der Fehler kommt unter allen Umständen für die vierte Decimale noch nicht in Betracht.

Der Einfluss des Ablesungs- und Einstellungsfehlers endlich ergibt sich aus:

$$n = N \sin\varphi,$$

$$dn = N \cos\varphi d\varphi = \sqrt{N^2 - n^2} \cdot d\varphi.$$

$N = 1,63$  gesetzt, hat man z. B. für den Ablesungsfehler  $d\varphi = 0,0017$ , d. h. ein zehntel Grad, für die kleinsten und grössten in Betracht kommenden Brechungsverhältnisse  $n = 1,33$  und  $1,6$  die Fehler  $0,0016$  und  $0,0005$ . Die Messung kleiner Brechungsverhältnisse verlangt also eine Genauigkeit bis auf  $0,01^0$ , wenn die vierte Decimale



auf eine Einheit richtig werden soll. Eine Einstellung bis zu dieser Genauigkeit wird bei guten Flächen keine Schwierigkeit finden; deswegen wird die Ausführung eines Reflectometers mit einem grösseren Theilkreise, welcher auch die entsprechende Ablesung ermöglicht, nicht überflüssig sein.

#### VIII. Beobachtungen.

Die hier folgenden ersten Anwendungen unseres Verfahrens bezwecken zugleich eine Prüfung desselben in Bezug auf folgendes Bedenken gegen die Wollaston'sche und unsere Beobachtungsweise. Man kann nämlich dagegen einwenden, dass die Lichtgeschwindigkeit längs der Oberfläche nicht nothwendig dieselbe ist wie im Innern eines Körpers. Indessen sieht man zugleich, wie schon Abbe für sein Flüssigkeits-Refractometer bemerkt, dass ein Fehler hieraus nur dann erwachsen könnte, wenn in der Trennungsfläche zwischen dem zu untersuchenden Körper und der stärker brechenden Flüssigkeit eine Schicht entstünde, welche schwächer bricht als der Körper. Dies ist von vornherein unwahrscheinlich und würde ohne Zweifel an secundären Erscheinungen, wie Undeutlichkeit der Grenze oder Interferenzstreifen, kenntlich sein.

Immerhin kann hierüber nur die Erfahrung entscheiden. Desswegen wird man in dem folgenden Beobachtungsmaterial von etwa 100 Brechungsverhältnissen, ausser neu untersuchten Substanzen, auch eine Anzahl von solchen finden, deren Brechungsverhältniss schon anderweitig bekannt ist<sup>1)</sup>. Ein kleines Glasprisma habe ich ferner sowohl mit Totalreflexion wie auf gewöhnliche Weise mit dem Spectrometer untersucht.

1) Aus Beer, Optik. — Groth, Krystallographie. — Grailich, Krystallographisch-optische Untersuchungen. — Pape, Pogg. Ann. Ergbd. VI. p. 35. — Schrauf, Wien. Ber. XLI. p. 778. XLII. p. 116. 1860. — Topsöe und Christiansen, Ann. d. chim. et phys. (5) I. 1874. — Tschermak, Wien. Ber. LVII. p. 641. 1868. — Calderon, Beibl. I. p. 399. 1877.

Endlich ist von einem optisch zweiaxigen Krystall stets auch der äussere Axenwinkel  $2E$  in Natriumlicht (nur für Kupfervitriol in weissem Lichte) gemessen und zur Controle der Beobachtungen verwendet worden. Man berechnete nämlich aus dem Axenwinkel, aus dem grössten und dem kleinsten Brechungsverhältniss  $\alpha$  und  $\gamma$  jedesmal das mittlere Brechungsverhältniss  $\beta$  nach den Formeln  $\beta^2 =$

$$\gamma^2 + \frac{(\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma)}{\alpha^2} \sin^2 E \text{ oder } \alpha^2 - \frac{(\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma)}{\gamma^2} \sin^2 E$$

für positive oder negative Krystalle und stellte diesen berechneten neben den beobachteten Werth.

Die zur Controle dienenden, nicht selbst beobachteten Zahlen sind durch kleine Schrift ausgezeichnet.

Ferner wünschte ich ganz besonders die Anwendbarkeit des Totalreflectometers in solchen Fällen zu prüfen, in denen der Gebrauch des Spectrometers durch die Gestalt, Kleinheit oder Undurchsichtigkeit des Körpers ausgeschlossen ist. Deswegen habe ich absichtlich zum Theile derartiges Material ausgewählt.

So besass die Mejonitplatte nur eine Fläche von etwa 2 mm ins Quadrat. Man sieht, wie die beiden Messungen gut übereinstimmen; von dem Unterschiede kommt wohl ein Theil noch auf die Temperaturdifferenz.

Zu den dem Spectrometer unzugänglichen Körpern gehören auch die so wenig untersuchten Glimmer. Für das Reflectometer findet man leicht Flächenstückchen von hinreichend ebener Gestalt, die nach dem Vorigen sehr klein sein können. Das übrige verdeckt man mit Tusche. Allerdings wird zu den meisten Glimmern das Brechungsverhältniss des Schwefelkohlenstoffes nicht genügen. So konnte man an dem schwarzen, nahe einaxigen Glimmer nur den ausserordentlichen Strahl bestimmen, während der ordentliche offenbar nahe das Brechungsvermögen des Schwefelkohlenstoffes besass. Es zeigten sich nämlich im reflectirten weissen Lichte schon Farben in der äussersten Stellung. Beobachtet man in niedriger Temperatur, so

wird die Auswahl der untersuchbaren Glimmer schon sehr gross sein.

Als Beispiele der Anwendung auf undurchsichtige Körper dienen die Gläser, von denen auch das mit Kobalt und mit Kupfer gefärbte für Natriumlicht „undurchsichtig“ ist (über das letztere vgl. noch unter IX). Es fiel auf, dass das tiefschwarze Glas trotz sehr guter Politur eine weniger scharfe Grenze lieferte. Wie weit die Undurchsichtigkeit mit der totalen Reflexion verträglich ist, verdient offenbar eine besondere Untersuchung. Der Obsidian gab ein gutes Bild, was aber auch an den Rändern durchscheinend.

Ein Theil von den undurchsichtigen Körpern besass eine ungünstige Oberflächenbeschaffenheit; so waren die Flusspathe, insbesondere der graue, noch mehr die Elfenbeinplatte und ganz besonders der Schiefer Körper, welche man keineswegs mehr Spiegel nennen konnte. Nur bei sehr schrägem Visiren lieferten sie wirklich Spiegelbilder. Entsprechend war auch die Lichtgrenze nicht vollkommen scharf, aber deutlich als Grenze der totalen Reflexion durch das Farbenspiel im weissen Lichte gekennzeichnet.

Dass im Elfenbein eine schwache Doppelbrechung stattfindet, in dem Sinne, dass die Schwingungen senkrecht zur Faser etwas rascher fortschreiten, liess sich nur mit dem Nicol erkennen, und eine Schätzung des Unterschiedes war nur mit der Ocularscala ausführbar.

Der Achat, obwohl gut geschliffen und polirt, lieferte trotzdem eine undeutliche Grenze, offenbar weil dieser Körper aus unregelmässig gelagerten, einzeln doppelbrechenden Krystallen besteht.

Von den Beryllen will ich noch bemerken, dass sie theilweise ohne einen ersichtlichen Grund nicht ganz tadellose Grenzbilder gaben.

Die meisten Krystalle verdanke ich Hrn. Dr. Steeg in Homburg, der mich seine reiche Sammlung von Präparaten in liberalster Weise ausnutzen liess. Desgleichen gestattete mein College Hr. Sandberger freundlichst die

Benutzung geeigneten Materiales aus der Mineraliensammlung der Universität.<sup>1)</sup>

Wo im Folgenden nichts anderes bemerkt ist, waren die Flächen angeschliffen und ferner bei doppelbrechenden Krystallen senkrecht zur Axe, bzw. der ersten Mittellinie der beiden Axen gelegen.

Sämmtliche Brechungsverhältnisse gelten für Natriumlicht und beziehen sich auf Luft = 1.

Isotrope Körper.

	$n$	Temp.	Andere Beobachtungen.
Glasprisma, eine Fläche . . .	1,5291	23 <sup>0</sup>	1,5292 in durchgehendem Licht.
Dasselbe, andere Fläche . . .	1,5288	23	
Schwarzes Glas . . . . .	1,5489	24	
Kobaltglas . . . . .	1,5115	23	
Kupferoxydulglas, ungeschliffen	1,5224	23	
Dasselbe, angeschliffen . . .	1,556	16	
Dasselbe, die weisse Oberfläche	1,5224	22	
Die letztere Fläche, angeschliffen	1,523	16	
Flusspath, derb, grau . . . .	1,4324	23	1,433, bis 1,436 (Beer)
Flusspath, schwarz . . . . .	1,4342	19	
Obsidian . . . . .	1,4953	23	1,488 (Brewster)
Bernstein . . . . .	1,532	21	
Achat . . . . .	1,540	23	
Devonischer Schiefer . . . .	1,534	22	
Chlorsaures Natron . . . . .	1,5145	22	
Kali-Alaun, natürlich, überpolirt	1,4561	16	1,4549 (Graillich)
Chrom-Alaun, natürlich, desgl.	1,481	22	
Elfenbein . . . . .	1,540	21	
Elfenbein, anderes Stück . . .	1,535	19	
Schwefelkohlenstoff . . . . .	1,6271	21,9 <sup>0</sup>	1,6266 im Prisma.
Alkohol . . . . .	1,3628	20	
Wasser . . . . .	1,3327	21	

1) Im Schwefelkohlenstoff fand ich mit Natriumlicht keine Grenze an den Materialien: Apatit, Eisenepidot, Eisenspath, Euklas, Idokras, Phenakit, Turmalin, Zinnstein, Zirkon, Basalt, schwarzem und weissem Marmor. Diese Körper haben also, wie theilweise bekannt ist, ein Brechungsverhältniss  $> 1,62$ .

## Optisch einaxige Körper.

	$\omega$	$\epsilon$	Temp.
Quarz . . . . .	1,5438	1,5530	23°
Quarz, natürlich, parallel . . . . .	1,5436	1,5531	24
Rudberg . . . . .	1,5442	1,5533	—
Amethyst . . . . .	1,5440	1,5533	23
Citrin-Quarz, parallel . . . . .	1,5444	1,5532	22
Derselbe, parallel, Axe horizontal . . . . .	1,5445	—	22
Apophyllit . . . . .	1,5343	1,5369	22
Blutlaugensalz, gelbes, nat. . . . .	1,5752	1,5815	24
Essigsäures Kalkkupfer, nat., überpolirt . . . . .	1,436	1,478	23
Derselbe, natürlich, parallel . . . . .	1,435	1,478	25
Elfenbein . . . . .	1,5392	1,5407	21
Beryll, wasserhell, parallel . . . . .	1,571	1,566	21
Beryll, desgleichen, parallel . . . . .	1,5725	1,5678	24
Beryll, grünbläulich, parallel . . . . .	1,5804	1,5746	23
Dasselbe, parallel, Axe horizontal . . . . .	1,5803	—	22
Beryll, wasserhell, nat., parallel . . . . .	1,573	1,568	23
Nach Schrauf: Beryll von Nertschinsk . . . . .	1,5703	1,5659	21
„ „ Elba . . . . .	1,5734	1,5684	19
„ „ Brasilien . . . . .	1,5821	1,5757	18
Mejonit . . . . .	1,5649	1,5454	22
Derselbe . . . . .	1,5657	1,5459	19
Mellit . . . . .	1,5415	1,5154	21
Schrauf . . . . .	1,5393	1,5110	16
Schwarzer Glimmer, nat. . . . .	—	1,586	23
Natronsalpeter . . . . .	1,5842	1,3346	22
Natronsalpeter, nat. Spaltfläche . . . . .	1,5854	1,3369	23
Schrauf . . . . .	1,5874	1,3361	17
Schwefelsäures Nickel, nat. . . . .	1,5099	1,4860	24
Topsöe und Christiansen . . . . .	1,5109	1,4873	—
Unterschwefels. Ammon-Chlornatrium . . . . .	1,5546	1,5352	23

Was die Genauigkeit der Resultate betrifft, so ist selbstverständlich von zusammengesetzten Substanzen, wie Schiefer oder Achat, von Körpern, die, wie Bernstein, von Schwefelkohlenstoff angegriffen werden, oder von solchen,

## Optisch zweiaxige Körper.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	Temp.	$2E$	$\beta$ ber.
Gyps . . . . .	1,5280	1,5206	1,5183	—	93,7 <sup>o</sup>	1,5209
„ nat. gespalten . .	1,5289	1,5216	1,5198	26 <sup>o</sup>	—	—
Ängström	1,5297	1,5227	1,5206	—	—	—
Weinsäure . . . . .	1,6047	1,5355	1,4951	24 <sup>o</sup>	146,6	1,5356
Citronensäure . . . .	1,5077	1,4975	1,4930	24 <sup>o</sup>	114,9	1,4976
Schrauf	1,5089	1,4977	1,4932	15 <sup>o</sup>	—	—
Adular v. d. Eifel . .	1,5253	1,5250	1,5206	21 <sup>o</sup>	41,6 <sup>o</sup>	1,5250
Adular v. St. Gotthardt	1,5246	1,5230	1,5192	21 <sup>o</sup>	106,7	1,5231
Descloiseaux	1,5260	1,5237	1,5190	—	—	—
Glimmer, ostind., nat .	1,5997	1,5941	1,5609	23 <sup>o</sup>	71,9	1,5943
Arragonit . . . . .	—	—	1,5301	22 <sup>o</sup>	—	—
Rudberg	—	—	1,5301	—	—	—
Kalisalpeter . . . . .	1,5046	1,5031 <sup>1)</sup>	1,3327	23 <sup>o</sup>	7,5	1,5042
Mitscherlich	1,5052	1,5046	1,3330	—	—	—
Schrauf	1,5064	1,5056	1,3346	—	—	—
Bittersalz . . . . .	1,4612	1,4553	1,4324	21 <sup>o</sup>	78,6	1,4556
Topsøe u. Christiansen	1,4608	1,4554	1,4325	—	—	—
Borax . . . . .	1,4712	1,4682	1,4463	23 <sup>o</sup>	59,0	1,4683
Tschermak	1,4715	1,4686	1,4468	—	—	—
Kupfervitriol . . . .	1,5433	1,5368	1,5140	23 <sup>o</sup>	93,1	1,5366
Derselbe, in d. Axenebene	—	1,5370	—	24 <sup>o</sup>	—	—
Pape	1,5463	1,5394	1,5158	—	—	—
Zucker . . . . .	1,5698	1,5643	1,5362	24 <sup>o</sup>	78,5	1,5641
Calderon	1,5716	1,5667	1,5397	—	—	—

1) Eine spätere Prüfung ergab, dass diese Zahl jedenfalls durch einen Beobachtungsfehler zu klein gerathen ist.

die, wie Elfenbein oder Schiefer, keine hohe Politur annehmen, nicht mehr zu erwarten, als die Natur der Oberfläche ermöglicht. Auch natürliche Krystallflächen sind bekanntlich oft keineswegs vollkommen spiegelnde Ebenen, so dass die Grenze der totalen Reflexion nicht scharf erscheint. Bei solchen Körpern ist die vierte Decimale oben weggelassen.

Der oben berührte principielle Argwohn gegen das Ver-

fahren jedoch wird durch diese Zahlen vollends beseitigt. Dass verschiedene Individuen einer Substanz um einige Einheiten der dritten Decimale des Brechungsquotienten variiren können, ist nichts Neues. Schrauf's Bestimmungen an Beryllen von verschiedenen Fundorten liefern das beste Beispiel für derartige Unterschiede. Soweit es sich um Charakterisirung eines festen Körpers als Substanz oder auch um Erkennung eines solchen handelt, genügt eine Genauigkeit bis zur dritten oder bis auf einige Einheiten der vierten Decimale vollständig, und diese Genauigkeit spricht sich in den obigen Resultaten aus. Auch das angewandte Instrument, so wie die beträchtlichen Aenderungen in der Temperatur des Schwefelkohlenstoffs liessen eine grössere Uebereinstimmung nicht erwarten.

IX. Bemerkungen über das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeiten im Innern und an der Oberfläche des Körpers.

In einigen Fällen zeigte sich ein erwähnenswerther Unterschied zwischen der Lichtbrechung im Körper und derjenigen eines oberflächlichen Strahles. Dieser Unterschied aber enthält keinen Einwand gegen unser Verfahren, sondern vielmehr eine nützliche Seite desselben.

Merkwürdig verhielt sich zunächst das rothe Kupferglas, welches bekanntlich nur einseitig mit einer dünnen Schicht gefärbter Substanz bedeckt ist. Es erschien mir bei der ersten Beobachtung auffällig, dass dieses Glas auf der rothen und der ungefärbten Fläche nahe gleiche Brechungsverhältnisse zeigte. Das Glas schien in dem ursprünglichen Zustande ungeschliffen zu sein. Ich schliff die rothe Fläche ein wenig an, fand aber nachher ein nur wenig geändertes Brechungsverhältniss, nämlich 1,5233 anstatt vorher 1,5224. Zum zweiten male geschliffen, bot sich nun ein sonderbarer Anblick. Man sah in der einen Hälfte der Fläche eine anders gelegene Grenze als in der anderen Hälfte, beide durch einen undeutlichen, schräg verlaufenden Strich von einander getrennt. Die beiden Brechungsverhältnisse fanden sich gleich 1,5226 das eine,



also dem früheren nahe entsprechend, aber 1,556 das andere. Nochmaliges Anschleifen lieferte wieder eine klare Grenze mit dem Brechungsverhältniss 1,5553. An der weissen Glasfläche wurde kein Einfluss des Anschleifens bemerkt.

Jedenfalls bestand hiernach die rothe Oberfläche aus zwei übereinanderliegenden verschieden brechenden Schichten. Die obere war entweder verschieden dick oder wurde durch ungleichen Druck bei dem Schleifen verschieden stark angegriffen, so dass sie bei der dritten Beobachtung nur noch einen Theil der Oberfläche bedeckte. Diese Eigenthümlichkeit muss mit der Herstellungsweise des Glases zusammenhängen. Man wird auch bei anderen geblasenen Gläsern auf dergleichen Unterschiede der Oberfläche gegen das Innere achten müssen.

In anderer Weise erforderte das Bittersalz ( $\text{MgSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$ ) einiges Nachdenken, da dieser Körper bei verschiedenen Bestimmungen inconstante Resultate zeigte. Ich hatte, wie dies gewöhnlich bei den in Wasser löslichen Körpern geschah, die Fläche mit absolutem Alkohol polirt. Erst die Beobachtung, dass das Salz unter dem Exsiccator in kurzer Zeit verwitterte, klärte die Schwierigkeit mit grosser Wahrscheinlichkeit dahin auf, dass der absolute Alkohol Krystallwasser entzogen hatte. Man darf also derartige Körper nicht mit absolutem Alkohol poliren. Deswegen befeuchte ich in solchen Fällen die Zinnasche mit einem etwa 60-procentigen Weingeist.

Endlich ist noch in Betreff des Blutlaugensalzes hervorzuheben, dass das betreffende Stück, wie gewöhnlich dieser Körper, obwohl er quadratisch krystallisirt, sich unter dem Polarisationsapparate optisch zweiaxig zeigte. Trotzdem fanden sich in verschiedenen Richtungen des durch die natürliche Spaltungsebene gebildeten Hauptschnittes dieselben Brechungsverhältnisse. Dies stimmt mit der Annahme überein, dass die scheinbare Zweiaxigkeit auf inneren Spannungen beruht<sup>1)</sup>.

1) Groth, Krystallographie, p. 322.



Man sieht aus den vorigen Beispielen, dass in der Totalreflexion ein Weg zur Erforschung von Eigenthümlichkeiten der Oberfläche gegeben ist, welcher vielleicht in mancher Richtung nützlich sein kann.

X. Ueber das Studium der Lichtwellenflächen in Krystallen.

Eine interessante Anwendung bietet das Totalreflectometer noch auf einem Felde der theoretischen Optik. Schon Wollaston<sup>1)</sup> hat die Huygens'sche Annahme über die Wellenfläche im Kalkspath geprüft. Die jetzige Methode erlaubt diese Prüfung mit grosser Schärfe.

Ich habe mich auf einige Beobachtungen in der natürlichen Spaltfläche des Gypses beschränkt, welche bekanntlich in der optischen Axenebene liegt. Dabei war das Durcheinandergehen der beiden Brechungsverhältnisse, der Fresnel'schen Wellenfläche entsprechend, leicht zu beobachten. Besonderes Interesse bietet der Anblick des Doppelpunktes dieser Fläche, welcher bei der Beobachtung in der Richtung einer Axe als Kreuzungspunkt der beiden Lichtgrenzen dem Auge direct erscheint.

Ueber eine eingehende Untersuchung in dieser Richtung ist von anderer Seite in der Sitzung der medicinischen Gesellschaft zu Würzburg vom 9. d. M. berichtet worden.

Würzburg, März 1878.

---

1) Philos. Trans. 1802. p. 381.

## II. Ueber den Einfluss des Lösungsmittels auf die Absorptionsspectra gelöster absorbirender Medien; von Aug. Kundt.

(Aus den Sitzungsberichten d. k. Bayr. Akademie vom 7. Juli 1877 vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

In einer Mittheilung in Pogg. Ann. Jubelbd. p. 615 habe ich einige Folgerungen entwickelt, die sich aus den von mir experimentell ermittelten Beziehungen zwischen Dispersion und Absorption zu ergeben schienen.

Die erste dieser Folgerungen war, dass bei einer absorbirenden, in verschiedenen Lösungsmitteln löslichen Substanz eine gesetzmässige Verschiebung eines Absorptionsstreifens mit dem Lösungsmittel statthaben müsse, und zwar derart, dass eine Absorptionsbande, welche die absorbirende Substanz in einem normalen Dispersions- oder Beugungsspectrum zeigt, im allgemeinen um so weiter nach dem rothen Ende dieses Spectrums rücke, je grösser die Dispersion des benutzten Lösungsmittels ist.

Die folgende Mittheilung enthält die Resultate einer grösseren Reihe von Versuchen, welche ich über den Einfluss eines farblosen Lösungsmittels auf das Absorptionsvermögen absorbirender Medien angestellt habe.

Es hat sich hierbei gezeigt, dass die von mir aufgestellte Regel zwar nicht stets und in aller Strenge durch die Versuche bestätigt wird, aber in einer grossen Zahl derselben klar zu Tage tritt.

Bei der vielfachen praktischen Verwendung, welche die Untersuchung der Absorptionsspectra absorbirender Lösungen bereits gefunden hat, scheint es, auch ohne Rücksicht auf die Bestätigung oder Nichtbestätigung einer allgemeinen Regel, von Interesse, den Einfluss des Lösungsmittels genauer kennen zu lernen.

Ich werde im Folgenden zunächst lediglich die Beobachtungen mittheilen und hier nicht auf die l. c. nur

angedeuteten Betrachtungen, welche mich zur Aufstellung der erwähnten Regel führten, eingehen.

Die Versuche wurden einfach in der Weise ausgeführt, dass zwischen die Lichtquelle (Lampe oder Sonnenlicht) und den Spalt eines Spectroskops die auf Absorption zu untersuchende Flüssigkeit in einem Gefäss mit planparallelen Wänden eingeschaltet wurde. Bei einzelnen dieser Gefässe war die eine Wand verschiebbar, so dass die Dicke der durchstrahlten Flüssigkeitsschicht beliebig variirt werden konnte.

Die Lösungen wurden meist so hergestellt, dass eine bestimmte Quantität der absorbirenden Substanz in einem geeigneten Medium gelöst wurde, und zu bestimmten Mengen dieser Lösung wurden dann die anderen Lösungsmittel in gleichen Portionen zugesetzt. Zuweilen wurde auch die feste absorbirende Substanz direct in verschiedene Lösungsmittel gebracht.

Ich habe verschiedene Spectroskope benutzt, da sich, besonders für eine Voruntersuchung, nicht jedes Spectroskop für jede Substanz gleich gut eignet.

Für die weiter unten angegebenen Versuche wurde theils ein geradsichtiges Spectroskop von Merz, theils ein Spectralapparat von Steinheil verwendet, in den ein sehr stark brechendes Prisma ( $n_D = 1,75$ ) eingesetzt war.

Als Messapparat diente in beiden Fällen das dem Merz'schen Apparat zugehörige Beobachtungsfernrohr, bei dem das Ocular mit einer in der Focalebene angebrachten Spitze durch eine Mikrometerschraube mit getheiltem Kopf bewegt wird.

Wird die Lage der Linie *B* des Sonnenspectrums als Nullpunkt genommen, so gibt bei dem Merz'schen Apparat die Messvorrichtung für die übrigen Fraunhofer'schen Linien die folgenden Zahlen:

<i>B</i>	0	—	0	<i>E</i>	5	—	78
<i>C</i>	0	—	68	<i>b</i>	6	—	43
<i>D</i>	2	—	70	<i>F</i>	9	—	18.

Die Zahlen der ersten Verticalcolumnne geben die ganzen Schraubenumgänge, die der zweiten die Trommeltheile.

Die Trommel der Schraube ist in 100 Theile getheilt.

Es entspricht mithin zwischen den Linien *D* und *E* 1 Theil der Schraubentrommel einer Aenderung der Wellenlänge im Spectrum von ungefähr 0,000 000 2 mm.

Wird für den Steinheil'schen Apparat die Linie *D* als Nullpunkt genommen, so gibt die Messvorrichtung für die anderen Linien die folgenden Werthe in ganzen Schraubenumgängen und Theilen der Schraubentrommel:

<i>D</i>	0	—	0	<i>F</i>	2	—	24
<i>E</i>	1	—	14	<i>G</i>	4	—	32.
<i>b</i>	1	—	37				

Es entspricht mithin bei diesem Apparat 1 Theil der Schraubentrommel zwischen *D* und *E* einem Wachsen der Wellenlänge um ungefähr 0,000 000 55 mm.

Bei den Versuchen wurden gewöhnlich die Mitten der Absorptionsstreifen eingestellt. Es ist daher bei der Vergleichung der Lage einer Absorptionsbande in den verschiedenen Lösungsmitteln sehr wichtig, dass die Concentration und die Dicke der durchstrahlten Schicht möglichst gleich sei. Wenn die Concentration nicht genau gleich zu machen war, wie z. B. wenn eine stark tingirende feste Substanz direct in verschiedenen Lösungsmitteln gelöst wurde, so wurden die Schichten so gewählt, dass die Absorptionsbande bei den zu vergleichenden Lösungen möglichst gleich breit erschienen.

Die Fehlergrenze der Einstellung der Mitte eines Streifens ist ausserordentlich variabel, je nach der Breite, Schärfe und Schwärze des Streifens. Die Breite, scharfe Begrenzung des Absorptionsstreifens, wie die Intensität der Absorption erleiden sogar kleine Aenderungen bei einer und derselben absorbirenden Substanz in verschiedenen Lösungsmitteln.

Die einzelnen Beobachtungsreihen sind daher bezüglich der Fehlergrenze der Einstellung in keiner Weise mit

einan  
der A  
sung  
dass  
fehle  
einer  
den  
ratur  
spect

gema  
der  
diese

12 I  
Cass

phyl  
Dies  
nen  
such  
Abs  
nutz  
liegt  
und  
und

alko  
Sch  
ziem  
stan  
gese

fen  
beo  
sun

einander vergleichbar. Die beobachteten Verschiebungen der Absorptionsstreifen bei den benutzten Substanzen, Lösungsmitteln und Apparaten waren aber immer so gross, dass sie trotz der zuweilen beträchtlichen Einstellungsfehler deutlich zu Tage traten. Die Versuche wurden bei einer Temperatur zwischen 13 und 17° C. angestellt; bei den benutzten Substanzen waren diese kleineren Temperaturveränderungen ohne Einfluss auf die Absorptionsspectra.

Es wurden stets 10 Einstellungen desselben Streifens gemacht und zwar 5 von der weniger brechbaren, 5 von der mehr brechbaren Seite des Spectrums her, und aus diesen 10 Einstellungen wurde das Mittel genommen.

Für eine fortlaufende Beobachtungsreihe benutzte ich 12 Lösungsmittel, die bis auf 2 (Schwefelkohlenstoff und Cassiaöl) fast farblos waren.

Als absorbirende Substanzen wurden benutzt: Chlorophyll, Anilingrün, Cyanin, Fuchsin, Chinizarin, Eigelb. Diese Substanzen sind so gewählt, dass in den verschiedenen Farben des Spectrums Absorptionsstreifen zur Untersuchung kommen. Chlorophyll zeigt seinen ersten starken Absorptionsstreifen (und dieser wurde ausschliesslich benutzt) im Roth, das Absorptionsmaximum des Anilingrün liegt weiter nach Gelb, die dunkeln Streifen des Cyanins und Fuchsins rücken noch weiter nach Gelb. Chinizarin und Eigelb zeigen Absorptionsstreifen im Grün und Blau.

Die 12 Lösungsmittel:

Alkohol, Aether, Aceton, Wasser, Methylalkohol, Amylalkohol, Benzol, Toluol, Ligroin, Chloroform, Cassiaöl, Schwefelkohlenstoff sind so gewählt, dass wenigstens eine ziemliche Anzahl derselben alle die oben genannten Substanzen lösen, oder doch Lösungen dieser Substanzen zugesetzt werden konnten.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Lage der Streifen immer gleich nach dem Zusammengiessen der Lösungen beobachtet wurde, da manche der Substanzen in den Lösungsmitteln mit der Zeit Veränderungen erlitten.

## 1. Chlorophyll.

Eine Lösung von Chlorophyll wird bekanntlich unter dem Einfluss von Licht mit der Zeit verändert und durch geringe Mengen chemischer Agentien zersetzt. Bei diesen Veränderungen erweist sich der Absorptionsstreif der Chlorophylllösung, welcher dem rothen Ende des Spectrums am nächsten liegt (Nr. 1 nach der gewöhnlichen Bezeichnung), als der beständigste. Ich habe mich daher auf die Bestimmung der Lage dieses Streifens beschränkt.

Es wurde das Chlorophyll aus Blättern mit Alkohol, Aether oder Chloroform ausgezogen.

Aus der grossen Zahl der Versuche, die ich anstellte, theile ich nur die folgenden mit.

Es wurden je 2 ccm alkoholischer Chlorophylllösung mit 10 ccm eines der anderen Lösungsmittel versetzt. Die Dicke der durchstrahlten Schicht betrug 10 mm; benutzt wurde der Spectralapparat von Merz.

Bezeichnet man die Mitte des Absorptionsstreifens in derjenigen Lösung, welcher Aether zugesetzt war, mit Null, so lag die Mitte des Streifens bei Zusatz der andern Medien an folgenden Stellen:

Aether . . . . .	0,0	Chloroform . . . .	6,8
Aceton . . . . .	1,2	Benzol . . . . .	7,3
Alkohol . . . . .	3,2	Cassiaöl . . . . .	13,6
Amylalkohol . . . .	4,9	Schwefelkohlenstoff	18,6.

Die Zahlen geben ganze und zehntel Theile des Schraubenkopfes der messenden Schrauben am Merz'schen Spectralapparat.

Ein Steigen der Zahlen entspricht einem Fortrücken nach dem rothen Ende des Spectrums.

Jede der Zahlen ist, wie bereits oben bemerkt wurde, das Mittel aus 10 Einstellungen.

Sämmtliche anderen Versuche, welche über die Lage des ersten Absorptionsstreifens des Chlorophylls in den verschiedenen Lösungsmitteln angestellt wurden, zeigten,

dass sich die Medien bezüglich ihrer Fähigkeit, die Streifen nach Roth zu verschieben, in die angegebene Reihenfolge ordnen lassen.

Ligroin und Toluol wurden nicht benutzt, da die Lösung nicht ganz klar blieb; desgleichen auch Methylalkohol, da bei Zusatz dieses Mediums eine Veränderung des Farbstoffes einzutreten schien.

## 2. Anilingrün.

Die benutzte Substanz war eine als Anilingrün bezeichnete Anilinfarbe von Marquardt in Bonn. Dieselbe zeigt einen breiten Absorptionsstreifen, dessen Mitte bei schwacher Concentration ganz nahe bei *C* liegt.

Die Zahl von Versuchsreihen, die mit dieser Substanz angestellt wurde, ist nicht gross, da sich ergab, dass die Versuchsergebnisse mit denjenigen, welche die anderen Substanzen zeigten, im allgemeinen in guter Uebereinstimmung waren.

Nur die Lösungen bei Zusatz von Chloroform, Amylalkohol und Ligroin wurden mehrfach untersucht.

2 ccm Lösung Anilingrün in Alkohol wurden mit 10 ccm der anderen Lösungsmittel versetzt. Die Lösung war so schwach concentrirt, dass bei 13 mm durchstrahlter Schicht der Absorptionsstreif noch ziemlich schmal war.

Die Mitte des Streifens bei Zusatz von Methylalkohol ist mit Null bezeichnet.

Benutzt wurde der Apparat von Merz und Lampenlicht. Die Zahlen geben Theile der Trommel der messenden Schraube. Dem Steigen der Zahlen entspricht eine Verschiebung nach Roth.

Methylalkohol . . . . .	0,0	Ligroin . . . . .	19,5
Aceton . . . . .	1,6	Benzol . . . . .	22,4
Alkohol . . . . .	8,4	Toluol . . . . .	25,4
Aether . . . . .	11,3	Cassiaöl . . . . .	29,4
Chloroform . . . . .	12,7	Schwefelkohlenstoff .	41,2.
Amylalkohol . . . . .	14,3		



Der absolute Betrag der Verschiebung ist hier beträchtlich grösser als beim Chlorophyll.

Die Mitte des Streifens ist bei Schwefelkohlenstoff im Vergleich zur Lage desselben bei Methylalkohol um fast  $\frac{2}{3}$  des Intervalls der Linien *B* und *C* nach Roth gerückt.

### 3. Cyanin.

Mit Cyanin wurde eine grosse Zahl von Versuchen angestellt, einmal, weil der Streifen in Cyanin sich sehr gut und scharf einstellen liess, dann, weil Cyanin in einem grossen Theile der Lösungsmittel direct lösbar ist. Es löst sich sehr gut in Alkohol und Chloroform, ziemlich gut in Cassiaöl, entfärbt sich aber mit der Zeit in letzterem. Merklich weniger gut löst es sich in Benzol und Schwefelkohlenstoff und noch etwas weniger in Aether.

Es wurden zunächst Lösungen des Cyanins in Alkohol und Chloroform benutzt und diesen gleiche Mengen der anderen Lösungsmittel zugesetzt. Die Reihenfolge der Lösungsmittel bezüglich der Verschiebung des Absorptionsstreifens ergab sich durchaus gleich, mochte das Cyanin ursprünglich in Alkohol oder in Chloroform gelöst sein.

Die Reihenfolge der Substanzen gibt folgender Versuch:

1 ccm Cyanin in Alkohol wurde mit 10 ccm der anderen Lösungsmittel versetzt. Es wurde das Merz'sche Spectroskop und Lampenlicht benutzt.

Die Mitte des Streifens bei Zusatz von Methylalkohol ist mit Null bezeichnet; die Zahlen geben Theile der Schraubentrommel:

Methylalkohol . . .	0,0	Ligroin . . . . .	15,4
Aceton . . . . .	2,4	Chloroform . . . .	31,1
Alkohol . . . . .	3,7	Benzol . . . . .	34,2
Aether . . . . .	7,5	Cassiaöl . . . . .	38,0
Amylalkohol . . . .	12,7	Schwefelkohlenstoff .	49,8.

Der Abstand der beiden Fraunhofer'schen Linien *D* und *C* beträgt bei diesem Apparat beiläufig 2 Schraubenumgänge, es ist mithin die Mitte des Streifens bei Schwe-



felkohlenstoff um ungefähr  $\frac{1}{4}$  der Distanz der Linien C und D nach Roth gegen die Lage des Absorptionsstreifens beim Methylalkohol gerückt.

Bei einem anderen Versuche wurden 4 ccm alkoholischer Cyaninlösung mit 6 ccm der anderen Lösungsmittel versetzt. Benutzt wurden das Thalliumprisma und dazu der Messapparat von dem Merz'schen Spectroskop.

Die Lage der Mitte des Streifens bei Methylalkohol ist wieder mit Null bezeichnet. Es ergab sich die Lage der Mitte des Streifens bei Zusatz der anderen Medien folgendermaassen:

Methylalkohol . . . . .	0,0	Ligroin . . . . .	5,4
Wasser . . . . .	0,0	Chloroform . . . . .	11,4
Aceton . . . . .	2,8	Toluol . . . . .	11,7
Alkohol . . . . .	3,5	Benzol . . . . .	11,8
Aether . . . . .	4,0	Cassiaöl . . . . .	13,2
Amylalkohol . . . . .	5,3	Schwefelkohlenstoff .	16,0.

Es wurde sodann festes Cyanin direct in den verschiedenen Mitteln gelöst und dann die Lage der Streifenmitte bestimmt. Es war hier nicht möglich, die Concentration gleich zu machen, da man die für diese Versuche erforderliche kleine Cyaninmenge ohne allzu grosse und unnütze Mühe nicht genau abwägen kann.

Es wurde daher die Concentration nur nach dem Augenschein gleich gemacht und dann die Dicke der vor dem Spectralapparat durch die Lichtstrahlen zu durchlaufenden Schicht so regulirt, dass die Absorptionsstreifen in den verschiedenen Lösungsmitteln möglichst gleiche Breite zeigten.

Von den betreffenden Versuchen möge der folgende als Beispiel genommen werden. Wird die Mitte des Streifens bei Lösung in Alkohol mit Null bezeichnet, so lag dieselbe bei den übrigen Lösungsmitteln an den folgenden Stellen. Benutzt wurde das Merz'sche Spectroskop. Bei Lösung in:

Alkohol . . . . .	0,0	Benzol . . . . .	44,3
Aëther . . . . .	2,9	Cassiaöl . . . . .	47,0
Chloroform . . . . .	36,9	Schwefelkohlenstoff .	76,8.

Alle Versuche, die überhaupt angestellt wurden, ergaben, dass die Substanzen sich bezüglich des Vermögens, den Absorptionsstreifen des Cyanins nach Roth zu schieben, stets in der Reihenfolge ordnen, wie es im Versuch auf der vorhergehenden Seite angegeben ist.

#### 4. Fuchsin.

Die Untersuchung von Fuchsin erfordert grössere Vorsicht. Zunächst ist sehr darauf zu achten, dass das Fuchsin nicht beim Zumischen eines anderen Lösungsmittels ausfällt. Das Ausfallen des festen Fuchsins geschieht zuweilen in so feiner Vertheilung, dass es schwer zu erkennen ist, ob man es noch mit einer wirklichen Lösung oder bereits mit festen, in der Flüssigkeit schwebenden Partikelchen zu thun hat.

Sodann hat Fuchsin nicht einen, sondern, wie bereits bemerkt, 2 Absorptionsstreifen<sup>1)</sup>. Bei ganz schwacher Concentration sieht man nämlich einen schmalen Streifen ziemlich in der Mitte zwischen *D* und *E*; wächst die Concentration oder die Dicke der Schicht, so verbreitet sich derselbe nicht continuirlich nach Blau, sondern es tritt hinter *E* eine stärkere Verdunkelung auf, die von dem Dunkelheitsmaximum zwischen *D* und *E* durch einen etwas weniger dunkeln Raum getrennt ist. Bei noch stärkerer Concentration verschmelzen die Streifen zu einem einzigen. Die Zweitheilung tritt bei allen Lösungsmitteln nicht mit gleicher Klarheit auf, und ist es bei dem mehr oder minder scharfen Hervortreten derselben zuweilen recht schwer, wirklich die Mitte der absorbirten Stelle einzustellen.

Die Beobachtungen bei Fuchsin zeigten daher auch

1) Pogg. Ann. CXLV. p. 79.

grössere Abweichungen unter einander als die Beobachtungen mit den anderen Substanzen.

Es gelang mir indess doch, mit ziemlicher Sicherheit durch geeignete Combination der Versuche die Reihenfolge festzustellen, in welche die Körper sich bezüglich der Lage der Mitte des Absorptionsstreifens anordnen.

Bei jedem der nachfolgenden Medien der hier folgenden Reihe liegt die Mitte des Absorptionsmaximums weiter nach Roth als bei dem vorhergehenden:

*Wasser, Methylalkohol, Aceton, Alkohol, Aether, Chloroform, Amylalkohol, Ligroin, Benzol, Toluol, Cassiaöl, Schwefelkohlenstoff.*

#### 5. Chinizarin.

Das benutzte Chinizarin erhielt ich von Hrn. Prof. Baeyer. Es zeigt diese Substanz<sup>1)</sup> in ätherischer Lösung zwei gut markirte Absorptionsstreifen, den ersten bei der Linie *b*, den andern mitten zwischen *b* und *F*, und einen dritten matteren Streifen ungefähr bei *F*.

Für die Versuche wurde das Chinizarin in Chloroform gelöst, da sich die alkoholische Lösung bei Zusatz von Aceton und Methylalkohol, vielleicht infolge geringer Verunreinigungen dieser Körper, zersetzt. Die Lösung in Chloroform zeigte die beiden ersten Absorptionsstreifen gut und deutlich. Beim Zusatz der anderen Mittel zu der Lösung in Chloroform war die Schärfe der Streifen sehr verschieden, mit Benzol und Toluol waren sie sehr matt und wenig hervortretend, mit Aether, Ligroin und Schwefelkohlenstoff waren sie dagegen scharf markirt.

Es wurde sowohl die Mitte der einzelnen Streifen, wie das Helligkeitsmaximum zwischen den dunkeln Streifen eingestellt.

Als Beleg für die Grösse der Verschiebungen mögen folgende 2 Versuche dienen.

2 ccm Chinizarin in Chloroform wurden mit 10 ccm der übrigen Lösungsmittel versetzt. Benutzt wurde das

1) Ber. d. chem. Ges. VI. p. 511. 1873.

Thalliumprisma und der Messapparat vom Merz'schen Spectroskop.

Das Helligkeitsmaximum zwischen den beiden ersten dunkeln Streifen wurde eingestellt.

Bezeichnet man die Mitte dieses Helligkeitsmaximums bei Zusatz von Methylalkohol mit Null, so war die Mitte bei Zufügung der anderen Lösungsmittel um die folgenden Schraubentheile nach Roth gerückt:

Methylalkohol . . . . .	0,0	Chloroform . . . . .	8,3
Aceton . . . . .	0,8	Benzol . . . . .	9,3
Aether . . . . .	2,6	Cassiaöl . . . . .	11,3
Alkohol . . . . .	4,0	Schwefelkohlenstoff .	20,5.
Amylalkohol . . . . .	6,3		

Bei dem folgenden Versuche wurde die Mitte des ersten dunkeln Streifens eingestellt. Es wurde die gleiche Anordnung des Apparates wie oben benutzt, und wieder 2 ccm Chinizarin in Chloroform mit 10 ccm der übrigen Medien vermischt. Bezeichnet man die Mitte des Streifens bei Aceton mit Null, so war die Verschiebung nach Roth bei den anderen Lösungsmitteln in Theilen der Trommel der Schraube die folgende:

Aceton . . . . .	0,0	Chloroform . . . . .	10,2
Aether . . . . .	1,9	Toluol . . . . .	11,7
Alkohol . . . . .	3,0	Benzol . . . . .	13,0
Ligroin . . . . .	5,4	Cassiaöl . . . . .	16,7
Amylalkohol . . . . .	6,1	Schwefelkohlenstoff .	21,2.

#### 6. Eigelb.

Der gelbe Farbstoff des Hühnereidotter wurde mit Chloroform ausgezogen.

Bei schwacher Concentration sieht man zwischen *E* und *b* einen wenig dunkeln Streifen; einen dunkleren gerade bei *F* und einen ebensolchen etwa in der Mitte zwischen *F* und *G*; noch weiter nach Violett zeigt sich die Andeutung eines vierten Absorptionsstreifens. Bei starker Concentration bemerkt man nur den Streifen zwischen *E* und

$b$ ; der ganze blaue und violette Theil des Spectrums ist absorbirt.

Setzt man zur Lösung in Chloroform die andern Lösungsmittel, so findet man auch hier, wie beim Chinizarin, ziemlich auffällige Unterschiede in der Ausdehnung der Absorptionsstreifen und der Helligkeitsvertheilung in denselben.

Beim Zusatz von Cassiaöl ist z. B. der Absorptionsstreifen zwischen  $b$  und  $E$  kaum zu erkennen.

Bei einzelnen Versuchen wurde die Mitte eines der Absorptionsstreifen, bei anderen die Mitte des Helligkeitsmaximums zwischen 2 Absorptionsstreifen eingestellt.

Die Reihenfolge, in welcher die verschiedenen Lösungsmittel die Absorptionsmaxima nach Roth verschieben, und die relative Grösse dieser Verschiebungen ergibt sich aus folgendem Versuch:

Es wurden 3 ccm der Lösung des Eigelbfarbstoffes in Chloroform mit 6 ccm der anderen Lösungsmittel versetzt. Es wurde die Mitte des Streifens bei  $F$  eingestellt.

Benutzt wurde das Thalliumprisma und der Messapparat vom Merz'schen Spectroskop.

Die Lage der Mitte des Streifens bei Methylalkohol ist mit Null bezeichnet.

Es ergab sich:

Methylalkohol . . . . .	0,0	Chloroform . . . . .	7,5
Aceton . . . . .	0,4	Toluol . . . . .	10,2
Aether . . . . .	3,1	Benzol . . . . .	11,9
Alkohol . . . . .	4,4	Cassiaöl . . . . .	23,2
Amylalkohol . . . . .	6,0	Schwefelkohlenstoff	41,2.
Ligroin . . . . .	7,0		

In der nachfolgenden tabellarischen Uebersicht sind die sämmtlichen Versuche zusammengestellt; unter jeder absorbirenden Substanz sind in einer verticalen Columne die Lösungsmittel in der Reihe hingeschrieben, dass in jedem nachfolgenden der Absorptionsstreif weiter nach Roth liegt, als in dem vorangehenden.

Tabelle I.

Chlorophyll.	Anilingrün.	Cyanin.	Fuchsin.	Chinizarin.	Eigelb.
Aether	Methylalkoh.	Methylalkoh.	Wasser	Methylalkoh.	Methylalkoh.
Aceton	Aceton	Aceton	Methylalkoh.	Aceton	Aceton
Alkohol	Alkohol	Alkohol	Aceton	Aether	Aether
Amylalkohol	Aether	Aether	Alkohol	Alkohol	Alkohol
Chloroform	Chloroform	Amylalkohol	Aether	Amylalkohol	Amylalkohol
Benzol	Amylalkohol	Ligroin	Chloroform	Chloroform	Ligroin
Cassiaöl	Ligroin	Chloroform	Amylalkohol	Toluol	Chloroform
Schwefelkoh- lenstoff	Toluol	Toluol	Ligroin	Benzol	Toluol
	Benzol	Benzol	Benzol	Cassiaöl	Benzol
	Cassiaöl	Cassiaöl	Toluol	Schwefelkoh- lenstoff	Cassiaöl
	Schwefelkoh- lenstoff	Schwefelkoh- lenstoff	Cassiaöl		Schwefelkoh- lenstoff
			Schwefelkoh- lenstoff		

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, dass die Reihenfolge der Lösungsmittel für die verschiedenen absorbirenden Medien freilich nicht genau dieselbe ist, doch ist eine Uebereinstimmung der Verticalcolumnen im grossen und ganzen nicht zu verkennen.

Theilen wir die Lösungsmittel in 4 Gruppen, so stehen zu oberst stets Methylalkohol, Aceton, Alkohol, Aether, dann folgen als zweite Gruppe Chloroform, Amylalkohol, Ligroin, dann als dritte Abtheilung Toluol und Benzol und endlich als vierte Cassiaöl und Schwefelkohlenstoff.

Innerhalb dieser 4 Gruppen kommen Vertauschungen der Lösungsmittel in den verschiedenen Verticalcolumnen vor; so steht z. B. bei Chlorophyll Aether über Aceton, rückt dann bei Anilingrün, Cyanin und Fuchsin unter Alkohol und steigt bei Chinizarin und Eigelb wieder über Alkohol.

Ebenso sind Chloroform und Amylalkohol mehrere male vertauscht; bei Fuchsin steht Toluol unter Benzol, während es sonst stets darüber steht. Es tritt indessen

in keiner der Columnen eine Substanz aus einer der vier Gruppen, in die wir allerdings ziemlich willkürlich die Medien theilten, in eine andere hinein.

Aus der im grossen und ganzen vorhandenen Uebereinstimmung der Verticalcolumnen scheint jedenfalls zur Genüge hervorzugehen, dass die Verschiebung der Absorptionsstreifen nicht lediglich oder hauptsächlich durch chemische Wirkung der Lösungsmittel auf den Farbstoff hervorgebracht ist; denn es ist kaum einzusehen, wie die Lösungsmittel Farbstoffe von der verschiedensten Zusammensetzung übereinstimmend chemisch derartig verändern sollten, dass die absorptiven Eigenschaften dieser Farbstoffe so gleichmässige und allmählich fortschreitende Veränderungen erlitten. Es müssen vielmehr physikalische Eigenschaften der Lösungsmittel sein, welche diese allmähliche Verschiebung bedingen.

Von den physikalischen Constanten der Medien können hier nun nicht wohl andere als die Dichte, der Brechungsexponent und die Dispersion in Betracht kommen. Die genannten Constanten wurden daher ermittelt.

Die Bestimmung der Dichte  $D$  wurde mit sehr guten Aräometern von Geissler in Berlin und Sekretan in Paris vorgenommen.

Die Bestimmungen wurden bei circa  $18^{\circ}\text{C}$ . ausgeführt und ergaben, geordnet nach der Grösse:

Tabelle II.

	D.		D.
Ligroin . . . . .	0,687	Toluol . . . . .	0,871
Aether . . . . .	0,713	Benzol . . . . .	0,885
Alkohol . . . . .	0,800	Wasser . . . . .	0,997
Methylalkohol . . .	0,802	Cassiaöl . . . . .	1,035
Amylalkohol . . . .	0,819	Schwefelkohlenstoff	1,272
Aceton . . . . .	0,846	Chloroform . . . .	1,501

Durch Vergleichung dieser Tabelle mit der Tabelle I sieht man sofort, dass die Dichte des Lösungsmittels direct in keiner Weise für die Verschiebung der Absorp-



tionsstreifen bedingend ist. Die Anschauung von Kraus<sup>1)</sup> ist mithin, wie ich bereits früher angegeben habe, irrig.

Besonders Ligroin und Chloroform sind in Bezug auf die Dichte von Interesse. Bei Benutzung von Ligroin müssten die Streifen einer absorbirenden Substanz sehr weit nach Blau, bei Benutzung von Chloroform sehr weit nach Roth gerückt sein, sollte die Dichte des Lösungsmittels allein maassgebend sein.

In Wirklichkeit zeigen die Absorptionsstreifen bei Anilingrün, Cyanin, Fuchsin und Eigelb keine beträchtliche Verschiebung bei Vertauschung von Ligroin und Chloroform als Lösungsmittel, während dagegen in den Alkoholen, die ein beträchtlich höheres specifisches Gewicht haben, als Ligroin, die Streifen weiter nach Blau und für Cassiaöl und Schwefelkohlenstoff, die eine wesentlich kleinere Dichte als Chloroform haben, die Streifen nach Roth gerückt sind.

Ausser der Dichte wurde sodann von den Lösungsmitteln die Brechung und Dispersion bestimmt. Die Bestimmung der Brechungsexponenten geschah mit einem grossen Spectrometer von Meyerstein.

Die Flüssigkeiten wurden in Hohlprismen von Steinheil oder Meyerstein, deren Construction bekannt ist, eingeschlossen.

Die Brechungsexponenten wurden bei einer mittleren Temperatur von 15° für die Fraunhofer'schen Linien *A*, *a*, *B*, *C*, *D*, *E*, *b*, *F*, *G*, *H* bestimmt.

Aus den Werthen für *B* und *G*, bei Cassiaöl für *B* und *D* wurden sodann unter Annahme der einfachen Dispersionsformel:

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

die Constanten *a* und *b* berechnet. Zur Controle wurden mit Hülfe von *a* und *b* die Werthe von *n* für die übrigen Fraunhofer'schen Linien berechnet.

Hierbei ist zu bemerken, dass eigentlich nur für die

1) Zur Kenntniss der Chlorophyllfarbstoffe, p. 53.



schwächer dispergirenden Substanzen die Anwendung der obigen Formel berechtigt ist, insofern nur bei ihnen die Differenz zwischen beobachteten und berechneten Brechungsexponenten 1 bis 2 Einheiten der vierten Decimale nicht überschreitet, also sich nahe an der Grenze der Beobachtungsfehler hält, während bei den stärker dispergirenden Medien (Toluol, Benzol, Cassiaöl, Schwefelkohlenstoff) die Differenz zwischen beobachteten und berechneten Werthen grösser ist, und in einigen Fällen bis zu 2 Einheiten der dritten Decimale wächst.

Da es sich indessen für den vorliegenden Fall wesentlich nur darum handelt, die Medien nach der Grösse der Brechung und Dispersion zu ordnen und die obengenannten stärker dispergirenden Substanzen schon beträchtliche Unterschiede in der Dispersion zeigen, wenn man die Brechungsexponenten bei der dritten Decimale abbricht, so schien hier die Berechnung aller Beobachtungen nach der einfachen Formel:

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

ausreichend zu sein. Als Wellenlängen wurden für die Rechnung die folgenden Werthe genommen:

A	B	C	D	E	F	G	H
7604	6868	6560	5880	5269	4860	4306	3967.

Die Werthe sind gegeben in Zehnmilliontel Millimeter. In derselben Längeneinheit ist in den folgenden Tabellen die Constante  $b$  ausgedrückt.

Ausser den Constanten  $a$  und  $b$  ist sodann noch das specifische Brechungsvermögen  $\frac{a^2-1}{D} = p$  und der Werth  $\frac{a-1}{D} = q$  ausgerechnet.

Für Wasser ist die Dispersion nicht bestimmt; ich habe für diese Substanz die Zahlen von Wüllner genommen.

Ich lasse nun zunächst die Dispersionsbeobachtungen mit den Rechnungsergebnissen folgen. Die Tabellen werden ohne weitere Erläuterungen verständlich sein.

	1. Methylalcohol.		2. Aceton.		3. Alcohol.	
	Beobachtet	Berechnet	Beobachtet	Berechnet	Beobachtet	Berechnet
<i>A</i>	1,3290	1,3291	1,3577	1,3577	1,3596	1,3596
<i>a</i>	1,3297	—	1,3584	—	1,3602	—
<i>B</i>	1,3302	1,3302	2,3591	1,3591	1,3609	1,3609
<i>C</i>	1,3308	1,3308	1,3598	1,3598	1,3615	1,3615
<i>D</i>	1,3326	1,3323	1,3617	1,3617	1,3633	1,3633
<i>E</i>	1,3344	1,3344	1,3641	1,3641	1,3656	1,3656
<i>b</i>	1,3348	—	1,3645	—	1,3660	—
<i>F</i>	1,3362	1,3362	1,3662	1,3663	1,3675	1,3676
<i>G</i>	1,3394	1,3394	1,3702	1,3702	1,3713	1,3713
<i>H</i>	1,3421	1,3422	1,3735	1,3735	1,3745	1,3744
	<i>a</i> 1,32417		<i>a</i> 1,351187		<i>a</i> 1,35409	
	<i>b</i> 0,028320		<i>b</i> 0,034064		<i>b</i> 0,031925	
	<i>D</i> 0,802		<i>D</i> 0,846		<i>D</i> 0,800	
	<i>p</i> 0,404		<i>p</i> 0,416		<i>p</i> 0,445	
	<i>q</i> 0,940		<i>q</i> 0,978		<i>q</i> 1,042	

	4. Aether.		5. Amylalcohol.		6. Ligroin.	
	Beobachtet	Berechnet	Beobachtet	Berechnet	Beobachtet	Berechnet
<i>A</i>	1,3550	1,3551	1,3989	1,3991	1,3857	1,3857
<i>a</i>	1,3558	—	1,3999	—	1,3865	—
<i>B</i>	1,3565	1,3565	1,4005	1,4005	1,3872	1,3872
<i>C</i>	1,3573	1,3572	1,4012	1,4013	1,3880	1,3879
<i>D</i>	1,3594	1,3592	1,4033	1,4034	1,3900	1,3900
<i>E</i>	1,3618	1,3617	1,4059	1,4060	1,3927	1,3927
<i>b</i>	1,3626	—	1,4064	—	1,3932	—
<i>F</i>	1,3641	1,3640	1,4082	1,4084	1,3951	1,3951
<i>G</i>	1,3681	1,3681	1,4127	1,4127	1,3995	1,3995
<i>H</i>	1,3713	1,3715	1,4158	1,4163	2,4031	1,4031
	<i>a</i> 1,34896		<i>a</i> 1,39263		<i>a</i> 1,37916	
	<i>b</i> 0,35500		<i>b</i> 0,037211		<i>b</i> 0,37730	
	<i>D</i> 0,713		<i>D</i> 0,819		<i>D</i> 0,687	
	<i>p</i> 0,489		<i>p</i> 0,480		<i>p</i> 0,552	
	<i>q</i> 1,149		<i>q</i> 1,147		<i>q</i> 1,313	

## 7. Chloroform.

## 8. Toluol.

## 9. Benzol.

	Beobachtet	Berechnet	Beobachtet	Berechnet	Beobachtet	Berechnet
<i>A</i>	1,4440	1,4439	1,4923	1,4920	1,4905	1,4904
<i>a</i>	1,4449	—	1,4939	—	1,4923	—
<i>B</i>	1,4458	1,4458	1,4954	1,4954	1,4939	1,4939
<i>C</i>	1,4467	1,4467	1,4970	1,4971	1,4955	1,4957
<i>D</i>	1,4492	1,4494	1,5014	1,5019	1,5002	1,5008
<i>E</i>	1,4525	1,4527	1,5074	1,5081	1,5066	1,5073
<i>b</i>	1,4532	—	1,5085	—	1,5078	—
<i>F</i>	1,4554	1,4557	1,5124	1,5135	1,5124	1,5130
<i>G</i>	1,4611	1,4611	1,5235	1,5235	1,5234	1,5234
<i>H</i>	—	—	1,5331	1,5318	1,5329	1,5321
	<i>a</i> 1,43584		<i>a</i> 1,47711		<i>a</i> 1,47471	
	<i>b</i> 0,46866		<i>b</i> 0,086031		<i>b</i> 0,090338	
	<i>D</i> 0,501		<i>D</i> 0,871		<i>D</i> 0,885	
	<i>p</i> 0,290		<i>p</i> 0,548		<i>p</i> 0,537	
	<i>q</i> 0,707		<i>q</i> 1,356		<i>q</i> 1,329	

## 10. Cassiaöl.

## 11. Schwefelkohlenstoff.

	Beobachtet	Berechnet	Beobachtet	Berechnet
<i>A</i>	—	—	1,6059	1,6050
<i>a</i>	—	—	1,6094	—
<i>B</i>	1,5659	1,5659	1,6122	1,6122
<i>C</i>	1,5690	1,5694	1,6155	1,6160
<i>D</i>	1,5780	1,5793	1,6248	1,6263
<i>E</i>	1,5905	1,5919	1,6376	1,6397
<i>b</i>	1,5910	—	1,6401	—
<i>F</i>	1,6029	1,6029	1,6494	1,6497
<i>G</i>	—	—	1,6729	1,6729
<i>H</i>	—	—	—	—
	<i>a</i> 1,52878		<i>a</i> 1,57294	
	<i>b</i> 0,175138		<i>b</i> 1,85412	
	<i>D</i> 1,035		<i>D</i> 0,1272	
	<i>p</i> 0,511		<i>p</i> 0,450	
	<i>q</i> 1,292		<i>q</i> 1,158.	

Ordnet man auf Grundlage der vorstehenden Beobachtungen die 12 Lösungsmittel nach der Grösse des Werthes  $p$ , so erhält man die Reihe:

*Chloroform, Wasser, Methylalcohol, Aceton, Alcohol, Schwefelkohlenstoff, Amylalcohol, Aether, Cassiaöl, Benzol, Toluol, Ligroin.*

Ordnet man nach den Grössen des Werthes  $q$ , so erhält man die Reihe:

*Chloroform, Wasser, Methylalcohol, Aceton, Alcohol, Amylalcohol, Aether, Schwefelkohlenstoff, Cassiaöl, Ligroin, Benzol, Toluol.*

Beide Reihen zeigen nicht die mindeste Uebereinstimmung mit den Columnen der Tabelle I., in welcher die Substanzen geordnet sind nach der Lage der Absorptionsstreifen.

Specifisches Brechungsvermögen oder brechende Kraft des Lösungsmittels ist also gleichfalls für die Verschiebung der Helligkeitsminima im Absorptionsspectrum nicht bedingend.

Ordnet man die Lösungsmittel dagegen nach der Grösse der Constanten  $a$  und  $b$ , so erhält man die folgenden Reihen:

Tabelle III.

	$a$		$b$
Methylalcohol . . .	1,324	Methylalcohol . .	0,0283
Wasser . . . . .	1,325	Wasser . . . . .	0,0305
Aether . . . . .	1,349	Alcohol . . . . .	0,0319
Aceton . . . . .	1,352	Aceton . . . . .	0,0341
Alcohol . . . . .	1,354	Aether . . . . .	0,0355
Ligroin . . . . .	1,379	Amylalcohol . .	0,0372
Amylalcohol . . .	1,393	Ligroin . . . . .	0,0377
Chloroform . . .	1,436	Chloroform . . .	0,0469
Benzol . . . . .	1,475	Toluol . . . . .	0,0860
Toluol . . . . .	1,477	Benzol . . . . .	0,0903
Cassiaöl . . . . .	1,523	Cassiaöl . . . . .	0,1424
Schwefelkohlenstoff	1,573	Schwefelkohlenstoff	0,1854.

Diese beiden Reihen stimmen wenigstens im Grossen und Ganzen mit den Columnen der Tabelle I, welche ja selbst nicht völlig unter einander übereinstimmen.

Wir theilten oben die Lösungsmittel in 4 Gruppen; in die erste fassten wir zusammen Wasser, Methylalcohol, Alcohol, Aceton und Aether, in die 2. Ligroin, Amyl-alcohol und Chloroform, in die 3. Benzol und Toluol, in die 4., Cassiaöl und Schwefelkohlenstoff; in dieselben 4. Gruppen können wir auch die Reihen der Tabelle III. theilen, in welcher die Medien nach der Grösse der Constanten  $a$  und  $b$  geordnet sind.

Man kann mithin als Resultat der ganzen Untersuchung den folgenden Satz aussprechen:

Hat ein farbloses Lösungsmittel ein beträchtlich grösseres Brechungs- und Dispersionsvermögen als ein anderes, so liegen die Absorptionsstreifen einer in den Medien gelösten Substanz bei Anwendung des ersten Mittels dem rothen Ende des Spectrums näher als bei Benutzung des zweiten.

Ein Medium, welches ein beträchtlich grösseres Brechungsvermögen hat als ein anderes, besitzt in den meisten Fällen auch ein grösseres Dispersionsvermögen; es wird sich experimentell daher sehr schwer entscheiden lassen, ob das Brechungs- oder Dispersionsvermögen einer Substanz das Maassgebende für die Verschiebung des Absorptionsstreifens ist.

Die Betrachtungen, die ich in meiner Mittheilung im Jubelband von Pogg. Ann. (l. c.) andeutete, hatten mich zu der Ansicht geführt, dass das ungleiche Dispersionsvermögen der Medien für die beobachteten Verschiebungen der Streifen maassgebend sei.

Wie bereits bemerkt, unterlasse ich es vorläufig, die dort angedeuteten Anschauungen weiter auszuführen, da eine ganz strenge und in allen Fällen gültige Beziehung zwischen Brechung und Absorption in den oben mitgetheilten Versuchen nicht zu Tage tritt.

Bei meinen ersten Versuchen (Pogg. Ann., Jubelbd., l. c.) hatte ich nur Substanzen angewendet, die beträchtliche Verschiedenheiten des Dispersionsvermögens zeigen. Damals konnte ich daher aussprechen, dass die bisherigen Versuche meiner Ansicht über Zusammenhang zwischen Dispersion der Lösungsmittel und Verschiebung der Absorptionsstreifen vollständig bestätigten.

Schliesslich will ich noch bemerken, dass ich ausser den oben behandelten 5 Farbstoffen noch eine Anzahl anderer in verschiedenen Lösungsmitteln untersucht habe. Ich fand stets, dass dasjenige Lösungsmittel, welches ein beträchtlich grösseres Brechungs- und Dispersionsvermögen als ein anderes besitzt, die Absorptionsstreifen weiter nach Roth verschiebt als letzteres.

Zur Demonstration der Verschiebung der Streifen eignet sich besonders gut übermangansaures Kali und schwefelsaures Didym. Man erhält eine sehr deutliche Verschiebung, wenn man den wässerigen Lösungen dieser Salze Glycerin zusetzt.

Ich habe noch zu ermitteln versucht, ob eine Verschiebung eines Absorptionsstreifens auftritt, wenn gleichzeitig mit dem absorbirenden Farbstoff ein anderer farbloser Körper in einer Flüssigkeit gelöst wird.

Ich goss zu dem Ende wässerige Fuchsinlösungen mit wässerigen Lösungen solcher Salze zusammen, welche ohne chemische Einwirkung auf das Fuchsin sind.

Es wurde wohl zuweilen eine Verschiebung beobachtet, doch war dieselbe immer sehr klein. Eine grosse Verschiebung wird man allerdings auch nicht erwarten können, da Brechung und Dispersion der benutzten Salzlösungen von der des reinen Wassers nicht sehr verschieden sind.

---

### III. Theorie der Doppelbrechung; von E. Lommel.

In der vorhergehenden Abhandlung, „Theorie der (normalen und anomalen) Dispersion“, habe ich gezeigt, dass sich die Brechung und Farbenzerstreuung aus der Annahme erklären lässt, dass Aether und Körpertheilchen durch Reibung auf einander einwirken, wobei der Aether, welcher die Zwischenräume der Moleküle erfüllt, als mit dem freien Aether identisch gedacht wird. Nun will ich zeigen, dass aus denselben Prämissen auch die Erklärung der Doppelbrechung folgt, und zwar in einfacherer und weit umfassender Weise, als aus den bisherigen Theorien.

Da die Atome eines Moleküls gegen einander verschiebbar sind, so ist jedes Molekül als ein kleiner elastischer Körper zu betrachten, in welchem nach den Lehren der Elasticitätstheorie drei zu einander senkrechte Hauptelasticitätsrichtungen vorhanden sind. Sind die homologen Elasticitätsaxen sämmtlicher (gleichartiger) Moleküle parallel gerichtet, so ist der Körper krystallisirt.

Wir denken uns diesen Körper bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen mit den drei Hauptelasticitätsrichtungen parallel laufen. Ein Volumenelement, dessen Schwerpunkt die Coordinaten  $x, y, z$  besitze, enthalte die Körpermasse  $m$  und die Aethermasse  $\mu$ . Der Punkt  $x, y, z$ , welcher im Ruhezustand der gemeinsame Schwerpunkt der Massen  $m$  und  $\mu$  ist, repräsentirt die gemeinschaftliche unverrückbare Gleichgewichtslage, nach welcher die beiden Massen (oder vielmehr ihre Schwerpunkte) durch die elastischen Kräfte hingetrieben werden. Bezeichnet man, nachdem eine Störung des Gleichgewichts stattgefunden hat, die Coordinaten der Massen  $m$  und  $\mu$  (d. i. ihrer Schwerpunkte) zur Zeit  $t$  resp. mit  $x', y', z'$  und  $\xi, \eta, \zeta$ , so sind die Componenten der Verschiebung der Masse  $m$ :

$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z,$$

und diejenigen der Masse  $\mu$ :

$$x - \xi', \quad y - \eta', \quad z - \zeta'.$$

Auf die Masse  $m$  wirke nun ausser den drei nach den Axen gerichteten Hauptelasticitätskräften, deren Intensitäten für die Einheit der Masse und der Verschiebung resp. durch  $p_1^2$ ,  $p_2^2$ ,  $p_3^2$  ausgedrückt sein mögen, und ausser einem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand noch die Reibung zwischen Aether- und Körpertheilchen, welche dem Unterschiede ihrer Geschwindigkeiten proportional zu setzen ist. Bezeichnet man daher mit  $2k$  den Widerstandscoefficienten, mit  $2\nu$  den Reibungsindex, so wird die Bewegung der Körpermasse  $m$  durch folgende drei Gleichungen bestimmt:

$$(1) \quad \begin{cases} m \frac{\partial^2(x-x')}{\partial t^2} = -2km \frac{\partial(x-x')}{\partial t} - mp_1^2(x-x') - 2m\nu \left( \frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial x'}{\partial t} \right), \\ m \frac{\partial^2(y-y')}{\partial t^2} = -2km \frac{\partial(y-y')}{\partial t} - mp_2^2(y-y') - 2m\nu \left( \frac{\partial \eta'}{\partial t} - \frac{\partial y'}{\partial t} \right), \\ m \frac{\partial^2(z-z')}{\partial t^2} = -2km \frac{\partial(z-z')}{\partial t} - mp_3^2(z-z') - 2m\nu \left( \frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial z'}{\partial t} \right). \end{cases}$$

Wenn aber die Aethermenge  $\mu$  der Körpermasse  $m$  durch die gegenseitige Reibung einen Impuls ertheilt, dessen Componenten durch die letzten Glieder der vorstehenden drei Gleichungen ausgedrückt sind, so muss nach dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung die Aethermasse  $\mu$  von seiten der Körpermasse  $m$  einen gleichgrossen Impuls in entgegengesetzter Richtung empfangen. Die Gleichungen für die Bewegung des Aethers werden daher folgende sein:

$$(2) \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial^2(x-\xi')}{\partial t^2} = \omega^2 \left( \frac{\partial^2(x-\xi')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x-\xi')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x-\xi')}{\partial z^2} \right) + 2m\nu \left( \frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial x'}{\partial t} \right) \\ \mu \frac{\partial^2(y-\eta')}{\partial t^2} = \omega^2 \left( \frac{\partial^2(y-\eta')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(y-\eta')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(y-\eta')}{\partial z^2} \right) + 2m\nu \left( \frac{\partial \eta'}{\partial t} - \frac{\partial y'}{\partial t} \right) \\ \mu \frac{\partial^2(z-\zeta')}{\partial t^2} = \omega^2 \left( \frac{\partial^2(z-\zeta')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(z-\zeta')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(z-\zeta')}{\partial z^2} \right) + 2m\nu \left( \frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial z'}{\partial t} \right) \end{cases}$$



wo  $\omega^2$  die Elasticität des Aethers darstellt. Dabei sei nochmals hervorgehoben, dass der zwischen den Molekülen der Körper enthaltene Aether als genau von derselben Beschaffenheit wie der freie Aether des leeren Weltraumes vorausgesetzt wird.

Wir haben nun zu untersuchen, ob eine Fortpflanzung einfach pendelartiger Schwingungen in ebenen Wellen und ohne Verdichtungen und Verdünnungen in diesem mit den Körpermolekülen in Wechselwirkung stehenden Aether stattfinden könne. Sollen keine Verdichtungen und Verdünnungen stattfinden, so muss die Gleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial (x - \xi')}{\partial x} + \frac{\partial (y - \eta')}{\partial y} + \frac{\partial (z - \zeta')}{\partial z} = 0$$

erfüllt sein, welche ausdrückt, dass die Schwingungen nur parallel zur Wellenebene, also transversal, erfolgen können. Die Normale der Wellenebene bilde mit den drei Elasticitätsachsen ( $x, y, z$ ) Winkel, deren Cosinus resp.  $u_3, v_3, w_3$  sind. Wir transformiren nun zunächst die Gleichungen (1) und (2) zu einem neuen rechtwinkligen Coordinatensystem, dessen  $z_1$ -Axe mit dieser Wellennormale zusammenfällt, so dass die neuen Axen der  $x_1, y_1, z_1$  mit den früheren der  $x, y, z$  Winkel bilden, deren Cosinus resp. sind:

$$u_1, v_1, w_1, \quad u_2, v_2, w_2, \quad u_3, v_3, w_3,$$

welche neun Cosinus bekanntlich durch die sechs Relationen:

$$(4) \quad \begin{cases} u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = 1, & u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = 0, \\ u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = 1, & u_1 u_3 + v_1 v_3 + w_1 w_3 = 0, \\ u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = 1, & u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3 = 0 \end{cases}$$

unter sich verknüpft sind. Wir haben alsdann in jene Gleichungen:

$$x = u_1 x_1 + u_2 y_1 + u_3 z_1,$$

$$y = v_1 x_1 + v_2 y_1 + v_3 z_1,$$

$$z = w_1 x_1 + w_2 y_1 + w_3 z_1$$

und die entsprechenden Ausdrücke für  $x'$ ,  $y'$ ,  $z$  und  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  einzusetzen. Die Gleichungen (1) lassen sich, nachdem dies geschehen ist, durch eine leichte Umformung, wobei wir den Index 1 der neuen Coordinaten der Einfachheit wegen wieder weglassen, auf folgende Gestalt bringen:

$$(1a) \left\{ \begin{array}{l} m \frac{\partial^2(x'-x)}{\partial t^2} + 2km \frac{\partial(x'-x)}{\partial t} + m N_1(x'-x) + m T_3(y'-y) \\ \quad + m T_2(z'-z) + 2m\nu \left( \frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial x'}{\partial t} \right) = 0, \\ m \frac{\partial^2(y'-y)}{\partial t^2} + 2km \frac{\partial(y'-y)}{\partial t} + m T_3(x'-x) + m N_2(y'-y) \\ \quad + m T_1(z'-z) + 2m\nu \left( \frac{\partial \eta'}{\partial t} - \frac{\partial y'}{\partial t} \right) = 0, \\ m \frac{\partial^2(z'-z)}{\partial t^2} + 2km \frac{\partial(z'-z)}{\partial t} + m T_2(x'-x) + m T_1(y'-y) \\ \quad + m N_3(z'-z) + 2m\nu \left( \frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial z'}{\partial t} \right) = 0, \end{array} \right.$$

worin:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} N_1 = p_1^2 u_1^2 + p_2^2 v_1^2 + p_3^2 w_1^2, \\ N_2 = p_1^2 u_2^2 + p_2^2 v_2^2 + p_3^2 w_2^2, \\ N_3 = p_1^2 u_3^2 + p_2^2 v_3^2 + p_3^2 w_3^2, \\ T_1 = p_1^2 u_3 u_2 + p_2^2 v_3 v_2 + p_3^2 w_3 w_2, \\ T_2 = p_1^2 u_1 u_3 + p_2^2 v_1 v_3 + p_3^2 w_1 w_3, \\ T_3 = p_1^2 u_1 u_2 + p_2^2 v_1 v_2 + p_3^2 w_1 w_2 \end{array} \right.$$

gesetzt wurde. Die Gleichungen (2) dagegen nehmen, wenn man sie nach der Transformation derselben Behandlung unterwirft wie die Gleichungen (1), ihre ursprüngliche Gestalt wieder an.

Wir betrachten nun eine zur neuen  $z$ -Axe senkrechte Wellenebene, deren Normale demnach mit den drei Elasticitätsachsen Winkel bildet, deren Cosinus  $u_3$ ,  $v_3$ ,  $w_3$  sind. Die zugehörige geradlinige Aetherschwingung, welche wir durch:

$$Ml = Me^{\frac{i}{c} \left( K + \frac{q}{c} t \right) z + q i t}$$

ausdrücken, wo  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,  $\frac{q}{2\pi}$  die Schwingungszahl und  $K$  den Absorptionscoefficienten bedeutet, fällt gemäss (3) nothwendig in die Wellenebene und ist demnach mit der neuen  $xy$ -Ebene parallel. Bezeichnet  $\varphi$  den Winkel, welchen die Schwingungsrichtung mit der neuen  $x$ -Axe einschliesst, so haben wir hiernach:

$$x - \xi' = Ml \cos \varphi, \quad y - \eta' = Ml \sin \varphi, \quad z - \zeta' = 0.$$

Die dritte der Gleichungen (2) zeigt, wenn man  $z - \zeta' = 0$  in sie einsetzt, dass auch  $z' - z = 0$  sein muss. Wir müssen daher den Gleichungen (1a) und (2) durch folgende Gruppe von Werthen Genüge leisten:

$$(6) \begin{cases} x - \xi' = Ml \cos \varphi, & y - \eta' = Ml \sin \varphi, & z - \zeta' = 0, \\ x' - x = Al, & y' - y = Bl, & z' - z = 0, \\ l = e^{-\left(K + \frac{q}{c}i\right)z + qit}. \end{cases}$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichungen (2), deren dritte ohnehin bereits erfüllt ist, ergeben sich die folgenden zwei Gleichungen:

$$\mu q^2 + \omega^2 \left(K + \frac{q}{c}i\right)^2 - 2m\nu q i \left(1 + \frac{A}{M \cos \varphi}\right) = 0,$$

$$\mu q^2 + \omega^2 \left(K + \frac{q}{c}i\right)^2 - 2m\nu q i \left(1 + \frac{B}{M \sin \varphi}\right) = 0,$$

welche gleichzeitig nur bestehen können, wenn:

$$(7) \quad \frac{A}{M \cos \varphi} = \frac{B}{M \sin \varphi} = \rho$$

ist, und sich alsdann auf die einzige:

$$(8) \quad \mu q^2 + \omega^2 \left(K + \frac{q}{c}i\right)^2 - 2m\nu q i (1 + \rho) = 0$$

zurückziehen. Aus den Gleichungen (1a) aber ergeben sich nach Einsetzung der Werthe (6) und nach gehöriger Reduction die folgenden drei Bedingungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \left( N_1 - q^2 - 2qi \left( \frac{v}{q} + v - k \right) \right) \cos \varphi + T_3 \sin \varphi = 0, \\ \left( N_2 - q^2 - 2qi \left( \frac{v}{q} + v - k \right) \right) \sin \varphi + T_3 \cos \varphi = 0, \\ T_2 \cos \varphi + T_1 \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Setzen wir nun:

$$(10) \quad 2qi \left( \frac{v}{q} + v - k \right) = s,$$

so dienen die beiden ersten Gleichungen der Gruppe (9), nämlich:

$$(11) \quad \begin{cases} (N_1 - q^2 - s) \cos \varphi + T_3 \sin \varphi = 0 \\ (N_2 - q^2 - s) \sin \varphi + T_3 \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

zur Bestimmung von  $s$  und  $\varphi$ . Eliminirt man aus ihnen den Winkel  $\varphi$ , so liefert die Eliminationsgleichung:

$$(12) \quad (N_1 - q^2 - s)(N_2 - q^2 - s) - T_3^2 = 0$$

stets zwei reelle Werthe von  $s$  und zu jedem derselben ergibt sich aus (11) der zugehörige Winkel  $\varphi$ . Nun ist aber bekannt, dass die Gleichungen (11) die Richtung und Grösse der Axen der Curve zweiten Grades:

$$(13) \quad (N_1 - q^2)x_1^2 + (N_2 - q^2)y_1^2 + 2T_3x_1y_1 = 1$$

bestimmen, und zwar sind die beiden Werthe von  $s$  die reciproken Quadrate der Halbaxen, und die zugehörigen Werthe von  $\varphi$  die Winkel, welche jede Halbaxe mit der  $x_1$ -Axe bildet. Die Lage der  $x_1$ -Axe in unserer Wellenebene ist aber dadurch fixirt, dass zu den fünf Gleichungen, welche, da  $u_3, v_3, w_3$  als gegeben zu betrachten sind, von der Gruppe (4) noch übrig bleiben, die dritte Gleichung der Gruppe (9) hinzutritt, so dass zur vollständigen Bestimmung der sechs Unbekannten  $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$  die nothwendigen sechs Gleichungen zu Gebote stehen.

Wir betrachten nun die Fläche zweiten Grades, deren Gleichung in Beziehung auf die Hauptelasticitätsaxen:

$$(A) \quad (p_1^2 - q^2)x^2 + (p_2^2 - q^2)y^2 + (p_3^2 - q^2)z^2 = 1$$

ist; wir transformiren letztere zu dem Coordinatensystem

der  $x_1, y_1, z_1$ , dessen  $z_1$ -Axe mit der Wellennormale ( $u_3, v_3, w_3$ ) zusammenfällt, und erhalten:

$$(14) \quad (N_1 - q^2)x_1^2 + (N_2 - q^2)y_1^2 + (N_3 - q^2)z_1^2 + 2T_3x_1y_1 + 2T_2x_1z_1 + 2T_1y_1z_1 = 1;$$

setzen wir darin  $z_1 = 0$ , so geht als Gleichung der Schnittcurve dieser Fläche mit der Wellenebene die Gleichung (13) hervor. Wir erkennen also, dass jener Kegelschnitt (13), durch dessen Axen die beiden möglichen Schwingungsrichtungen und (wie wir sogleich sehen werden) auch die zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestimmt werden, nichts anderes ist als der Diametralschnitt der Fläche ( $A$ ) mit einer zur Wellenebene parallelen Ebene. Wir wollen die Fläche ( $A$ ), da ihre Natur wesentlich von der Lage der Absorptionsstreifen im Spectrum abhängt, die Absorptionsfläche nennen. Das bis jetzt gefundene Resultat lässt sich alsdann, wie folgt, aussprechen:

Zu einer gegebenen Wellenebene gehören zwei bestimmte Schwingungsrichtungen, welche parallel sind zu den Axen des Diametralschnittes der Absorptionsfläche  $A$  mit einer zu jener Welle parallelen Ebene.

Da  $s$  stets reell ist, und  $q, \nu$  und  $k$  positiv sind, so muss vermöge Gleichung (10)  $\varrho$  nothwendig complex sein.

Setzen wir daher:

$$(15) \quad \varrho = \sigma + \tau i,$$

so liefert die Gleichung (10), wenn man das Reelle vom Imaginären sondert:

$$(16) \quad \sigma = \frac{4\nu(k-\nu)q^2}{s^2 + 4(k-\nu)^2q^2}, \quad \tau = \frac{2\nu qs}{s^2 + 4(k-\nu)^2q^2}.$$

Setzen wir nun in Gleichung (8)  $\varrho = \sigma + \tau i$ , so zerfällt sie durch Trennung des Reellen vom Imaginären in die beiden Gleichungen:

$$(17) \quad \frac{1}{c^2} - \frac{K^2}{q^2} = \frac{\mu}{\omega^2} \left( 1 + \frac{2m\nu\tau}{\mu q} \right),$$

$$(18) \quad 2\frac{K}{q} \cdot \frac{1}{c} = \frac{\mu}{\omega^2} \cdot \frac{2m\nu}{\mu q} (1 + \sigma),$$

welche zur Bestimmung der zwei Unbekannten  $c$  und  $K$ , d. i. der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und des Absorptionscoefficienten führen. Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\frac{\omega}{V\mu}$  im leeren Raume mit  $V$ , und setzen wir:

$$1 + \frac{2mvr}{\mu q} = P \quad \text{und} \quad \frac{2mvr}{\mu q} (1 + \sigma) = Q,$$

so ergibt sich:

$$(19) \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2V^2} (\sqrt{P^2 + Q^2} + P)$$

$$(20) \quad \frac{K^2}{q^2} = \frac{1}{2V^2} (\sqrt{P^2 + Q^2} - P),$$

worin  $P$  und  $Q$  sich im Hinblick auf (16) wie folgt durch die Grösse  $s$  ausdrücken:

$$(21) \quad P = 1 + \frac{4v^2m}{\mu} \cdot \frac{s}{s^2 + 4(k-v)^2q^2},$$

$$(22) \quad Q = \frac{2mvr}{\mu q} \cdot \frac{s^2 + 4k(k-v)q^2}{s^2 + 4(k-v)^2q^2}.$$

Einer jeden der beiden oben bestimmten Oscillationen kommt demnach eine eigene Wellengeschwindigkeit und ein eigener Absorptionscoefficient zu, welche von der zugehörigen Axe  $\frac{1}{Vs}$  des Diametralschnittes in der durch die Gleichungen (19—22) vorgeschriebenen Weise abhängen.

Die gleichzeitigen Bewegungen der Aether- und Körpertheilchen werden durch die reellen Theile der Ausdrücke (6) dargestellt. Es ergibt sich daraus für die Bewegung des Aethers:

$$(6a) \quad \begin{cases} x - \xi' = M \cos \varphi e^{-Kz} \cos \left( qt - \frac{q}{c} z \right), \\ y - \eta' = M \sin \varphi e^{-Kz} \cos \left( qt - \frac{q}{c} z \right), \end{cases}$$

und für die Bewegung der Körpertheilchen, wenn man die gefundenen Werthe von  $A$ ,  $B$  und  $\varrho$  einführt:

$$(6b) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' - x = MR \cos \varphi e^{-Kz} \cos \left( qt - \frac{q}{c} z + \psi \right), \\ y' - y = MR \sin \varphi e^{-Kz} \cos \left( qt - \frac{q}{c} z + \psi \right), \\ \text{wo} \quad R = \frac{2rq}{\sqrt{s^2 + 4(k-r)^2 q^2}} \\ \text{und:} \quad \cotg \psi = \frac{2(k-r)q}{s} \end{array} \right. \quad \text{ist.}$$

Selbstverständlich genügen diese reellen Theile für sich allein schon den Differentialgleichungen (1a) und (2); die imaginäre Form wurde oben nur der einfacheren Rechnung wegen gewählt.

Die obigen Gleichungen (19—22) enthalten aber nicht nur die Erklärung der Doppelbrechung im gewöhnlichen Sinne, sondern sie erklären auch die (normale und anomale) Dispersion, die Oberflächenfarben und deren Verschiedenheit auf verschiedenen Flächen sowie den Pleochroismus der Krystalle. Je nach der Lage der Absorptionsstreifen kann die Absorptionsfläche für eine gegebene Schwingungszahl der fortgepflanzten Welle drei, oder zwei oder eine oder gar keine reelle Axe haben. Liegt z. B. ein Absorptionsstreifen innerhalb des sichtbaren Spectrums, die beiden anderen im Ultraviolett, so ist die Absorptionsfläche für kleinere Schwingungszahlen ( $q < p_1$ ), d. i. vor dem Absorptionsstreifen, ein Ellipsoid, für das Maximum der molecularen Absorption ( $q = p_1$ ) wird sie zu einem Cylinder und geht hinter dem Absorptionsstreifen ( $q > p_1$ ) in ein einfächeriges Hyperboloid über; durch diese Umwandlung der Absorptionsfläche charakterisirt sich die anomale Dispersion. Eine eingehendere Discussion der verschiedenen, in unseren Formeln enthaltenen Fälle kann jedoch nicht die Aufgabe der gegenwärtigen kurzen Mittheilung sein, welche sich ihrer Ueberschrift gemäss nur mit dem bisher üblichen engeren Begriffe der Doppelbrechung zu beschäftigen hat. Was die anomale Dispersion und die Oberflächenfarben betrifft, mag einstweilen auf die vorhergehende Abhandlung „Theorie der (normalen und anomalen)

Dispersion“ zurückverwiesen werden, in welcher die nämlichen Gleichungen (19—22), (dort 10, 11, 10a und 11a) für einen speciellen Fall ( $u_3 = 0$ ,  $v_3 = 0$ ,  $w_3 = 1$ ) discutirt wurden.

Für jetzt beschränken wir uns darauf, die Doppelbrechung farbloser, durchsichtiger Krystalle, wie sie sich nach Maassgabe unserer Theorie gestaltet, abzuleiten.

Bei farblos durchsichtigen Körpern ist der Absorptionscoefficient  $K$  für sämtliche Strahlen des sichtbaren Spectrums als verschwindend klein anzusehen. Nach den Erörterungen der vorhergehenden Abhandlung aber hat der Absorptionscoefficient seine kleinsten Werthe in dem Gebiete vor dem Maximum der molecularen Absorption; soll daher das ganze sichtbare Spectrum diesem Gebiete angehören, so müssen die drei Maxima der Absorption, welche den Schwingungszahlen  $\frac{p_1}{2\pi}$ ,  $\frac{p_2}{2\pi}$ ,  $\frac{p_3}{2\pi}$  entsprechen, in den ultravioletten Theil des Spectrums fallen, d. i. jede dieser Schwingungszahlen muss grösser sein als die Schwingungszahl  $\frac{q}{2\pi}$  der fortgepflanzten Lichtwelle. Die Fläche:

$$(A') \quad (p_1^2 - q^2)x^2 + (p_2^2 - q^2)y^2 + (p_3^2 - q^2)z^2 = 1$$

ist daher jetzt ein Ellipsoid. Wenn aber  $K$  sehr klein ist, so ist auch  $Q$  sehr klein; vernachlässigen wir daher  $Q$  gegenüber  $P$ , und setzen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $V$  im leeren Raume  $= 1$ , so ergibt sich aus Gleichung (19):

$$\frac{1}{c^2} = P,$$

oder, wenn wir in Gleichung (21) im Nenner das Glied  $4(k - \nu)^2 q^2$  gegen  $s^2$  ausser Acht lassen:

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{s}.$$

Darin bedeutet  $\frac{1}{s}$  das Quadrat einer der beiden Halbachsen des Diametralschnittes des Ellipsoides ( $A'$ ) mit einer zur Wellenebene parallelen Ebene. Bezeichnen wir diese Halbaxe, welche sonach ein Radius vector jenes Ellipsoides ist, mit  $r'$ , und mit  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die Cosinus der Winkel,



welche dieser Radius vector mit den drei Hauptelasticitätsrichtungen (d. i. mit den Axen des Ellipsoides  $A'$ ) bildet, so haben wir:

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot r'^2,$$

oder:

$$(23) \quad \frac{1}{c^2} = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{(p_1^2 - q^2)u^2 + (p_2^2 - q^2)v^2 + (p_3^2 - q^2)w^2}.$$

Diese Gleichung liefert, wenn wir  $u=1$ ,  $v=0$ ,  $w=0$  setzen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der mit der  $x$ -Axe parallelen Schwingungen, oder, was dasselbe ist, das dieser Schwingungsrichtung entsprechende Hauptbrechungsverhältniss  $n_1$ ; bezeichnen wir die beiden anderen Hauptbrechungsindices, welche den Werthsystemen  $u=0$ ,  $v=1$ ,  $w=0$  und  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $w=1$  entsprechen, resp. mit  $n_2$  und  $n_3$ , so erhalten wir:

$$n_1^2 = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{p_1^2 - q^2}, \quad n_2^2 = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{p_2^2 - q^2}, \quad n_3^2 = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{p_3^2 - q^2},$$

und daraus:

$$\frac{\mu}{4\nu^2 m} (p_1^2 - q^2) = \frac{1}{n_1^2 - 1}, \quad \frac{\mu}{4\nu^2 m} (p_2^2 - q^2) = \frac{1}{n_2^2 - 1},$$

$$\frac{\mu}{4\nu^2 m} (p_3^2 - q^2) = \frac{1}{n_3^2 - 1}.$$

Wir können demnach die obige Gleichung (23) auch so schreiben:

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{1}{\frac{u^2}{n_1^2 - 1} + \frac{v^2}{n_2^2 - 1} + \frac{w^2}{n_3^2 - 1}}.$$

Setzen wir die rechte Seite dieser Gleichung  $= r^2$ , und betrachten  $r$  als den Radius vector einer krummen Fläche, so drückt sich die Gleichung dieser Fläche in rechtwinkligen Coordinaten, da  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $x = ru$ ,  $y = rv$ ,  $z = rw$  ist, folgendermaassen aus:

$$(B) \quad (x^2 + y^2 + z^2 - 1) \left( \frac{x^2}{n_1^2 - 1} + \frac{y^2}{n_2^2 - 1} + \frac{z^2}{n_3^2 - 1} \right) = x^2 + y^2 + z^2,$$

und wir haben:

$$(23b) \quad c = \frac{1}{r}.$$

Mit Rücksicht auf die oben ausgesprochenen allgemeinen Theoreme ergibt sich hieraus der folgende Satz:

In einem farblos durchsichtigen Krystall pflanzen sich in einer gegebenen Richtung im allgemeinen zweierlei ebene Wellen fort, deren Schwingungen in die Wellenebene fallen und auf einander senkrecht stehen. Man erhält die Richtungen dieser beiden Gruppen von Schwingungen, wenn man durch den Mittelpunkt der Fläche ( $B$ ) eine zur gegebenen Wellennormale senkrechte Ebene legt, welche die Fläche ( $B$ ) längs einer mit zwei zu einander senkrechten Axen begabten Curve schneidet. Die Schwingungen sind den Axen dieses Diametralschnittes parallel, und die reciproken Werthe der halben Axen geben die Geschwindigkeiten an, mit welchen sich die zugehörigen Schwingungen fortpflanzen.

Die Fläche ( $B$ ) spielt also in unserer Theorie dieselbe Rolle, wie in der Fresnel'schen Theorie das Ellipsoid:

$$(E) \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1,$$

welches die Fläche ( $B$ ) in den sechs Endpunkten der Axen berührt und sich derselben auch sonst sehr nahe anschliesst. Auch die Wellenfläche, welche der Fläche ( $B$ ) entspricht, stimmt mit der aus dem Ellipsoid ( $E$ ) hergeleiteten Fresnel'schen Wellenfläche sehr nahe überein; sie hat mit ihr nicht nur die zwölf Scheitel, sondern auch die in den Coordinatenebenen gelegenen Kreisschnitte gemein; sie ist namentlich auch durch jene Singularitäten ausgezeichnet, welche die innere und äussere conische Refraction bedingen, jedoch sind die Winkel der optischen Axen von denjenigen bei der Fresnel'schen Wellenfläche ein wenig verschieden. Von diesen kleinen Unterschieden abgesehen, stimmen also die Consequenzen unserer Theorie mit denjenigen der Fresnel'schen überein, und fallen ganz damit zusammen, wenn man sich erlaubt, der Fläche ( $B$ ) das ihr sehr nahe kommende Ellipsoid ( $E$ ) zu substituiren.

In den beiden vorhergehenden und der gegenwärtigen Abhandlung sind die Umrisse einer neuen Theorie des Lichts, — man könnte sie „Reibungstheorie“ nennen —, enthalten, welche die Erscheinungen in ihrem naturgemässen Zusammenhange aus der Wechselwirkung des Aethers und der Körpertheilchen erklärt. Von dem in den Körpern enthaltenen Aether wird angenommen, dass er von dem Aether des leeren Weltraumes in nichts verschieden sei und dass er die Zwischenräume zwischen den Körpermoleculen frei durchfluthe. Weit davon entfernt, dass durch die Mithberücksichtigung der Bewegung der Körpertheilchen die Theorie sich complicirt, wird vielmehr dadurch eine wesentliche Vereinfachung erzielt. Was insbesondere die Doppelbrechung anlangt, so werden eine Reihe von Schwierigkeiten, welche in den älteren Theorien aus der Annahme eines Aethers von besonderer (man könnte sagen „krystallinischer“) Constitution entspringen, mit einem Schlage beseitigt. So kommt z. B. das sogenannte Polarisationsellipsoid nebst den „quasitransversalen“ und „quasilongitudinalen“ Schwingungen ganz in Wegfall, und die Theorie führt sofort zu jener Construction, welche erfahrungsgemäss die Polarisationsverhältnisse der Krystalle darstellt. Bekanntlich müssen, je nachdem man die Fresnel'sche oder die Neumann'sche Hypothese über die Beschaffenheit des zwischenmolecularen Aethers acceptirt, die Schwingungen entweder senkrecht oder parallel zur Polarisationsebene angenommen werden. Unsere Theorie, welche die Beschaffenheit des incompressibel gedachten Aethers innerhalb und ausserhalb der Körper als völlig gleich voraussetzt, verlangt, dass bei einaxigen Krystallen die Schwingungen des gewöhnlich gebrochenen Strahls senkrecht zum Hauptschnitt, also senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen.

Erlangen, im Februar 1878.

#### IV. *Electrische Flüssigkeitsbewegungen; von M. von Waha in Luxemburg.*

##### I.

Setzt man eine horizontal gestellte Metallplatte in leitende Verbindung mit dem einen Pole einer Holtz'schen Influenzmaschine, deren anderer Pol mit einer senkrecht zur Platte gestellten Spitze verbunden ist, so strömt, bei geöffnetem Schliessungsbogen, die Electricität durch die Spitze auf die Platte über. Giesst man jetzt auf letztere schlechtleitende Flüssigkeiten, wie Olivenöl, Brennöl oder Petroleum, so bringt der Strom beim Durchgange durch dieselben verschiedenartige Bewegungen hervor.

Beträgt die Entfernung der Spitze von der Platte ein bis zwei Centimeter und ist die darunter befindliche Oelschicht nicht allzudick, so entsteht zuerst beim Uebergange des Stromes eine scharf begrenzte, nabelförmige Vertiefung, aus welcher alles Oel entfernt ist, so dass die Electricität freien Durchgang hat. Wird die Entfernung der Spitze von der Platte allmählich grösser, so nimmt der Durchmesser der Vertiefung auch demgemäss zu, bis dann die Flüssigkeit von den Rändern ins Innere der Vertiefung hineindringt und den Boden derselben nach und nach ganz bedeckt. Sobald sie jedoch den Rand überschreitet, wird sie vom electrischen Strome erfasst und in heftige Bewegung versetzt, so dass am Ende die ganze Erscheinung eine lebhaft bewegte, scharf begrenzte Flüssigkeitsfigur darstellt.

Beim ersten Anblicke ist es schwer, sich ein getreues Bild des Vorganges zu machen, denn alles geht zu wirre durcheinander. Bei langsamem, gleichmässigem Drehen der Maschine jedoch kommt etwas Ordnung in die Figur hinein. Die hie und da unregelmässig aufgetretenen Drehbewegungen schwinden und die zahlreichen kreuz und quer durcheinander laufenden Linien von allen möglichen For-

men  
Gera  
den  
dene  
mähl  
wird  
fung  
stän  
liche

Entf  
selbe  
dass  
Spit  
sowi  
eben  
güns  
Figu  
weni  
Gren  
sie i  
je n

an j  
plat  
fen,  
beli  
and  
Elec  
gerä  
in F  
Ruh  
nete  
der

von  
Kep

men lösen sich in eine gewisse Anzahl gleichlaufender Geraden auf, welche sich in gleichförmiger Bewegung von den Orten, wo die Flüssigkeitsschicht am dicksten, zu denen, wo sie am dünnsten ist, hinbewegen, um hier allmählich zu verschwinden. Jede dieser parallelen Linien wird durch eine grosse Menge trichterförmiger Vertiefungen gebildet, welche innerhalb der Linie sich in beständiger Bewegung erhalten, als ob sie von ihren seitlichen Nachbarn bald angezogen, bald abgestossen würden.

Der Durchmesser der Figur hängt wesentlich von der Entfernung zwischen Spitze und Platte ab und scheint derselbe diesen Entfernungen nahezu proportional zu sein, so dass der electriche Strom sich in Kegelform von der Spitze aus verbreiten würde. Die Intensität des Stromes, sowie der Zustand der atmosphärischen Luft sind jedoch ebenfalls von bedeutendem Einfluss. Ist letzterer weniger günstig, so verschwindet die Kreislinie, welche vordem die Figur scharf begrenzte, und die Ränder sind mehr oder weniger verschwommen. Es ist zu bemerken, dass die Grenzlinie nicht nothwendigerweise ein Kreis sein muss, sie ist auch manchmal eine Ellipse oder eine andere Curve, je nach der Vertheilung des Oeles auf der Platte.

Die Gesamtgestalt der Figur ist jedoch unbedingt an jene der unter der Flüssigkeit sich befindenden Metallplatte gebunden. Bildet man z. B. mittelst Stanniolstreifen, welche man auf eine Glasplatte klebt, irgend welche beliebige Figur, deren verschiedene Theile leitend mit einander verbunden sind, giesst Oel darauf und lässt die Electricität auf die so bereitete Platte ausströmen, so geräth das Oel, welches sich über den Streifen befindet, in Bewegung, währenddem alles andere in vollkommenster Ruhe verharret, und es tritt so die auf das Glas gezeichnete Figur in der grössten Deutlichkeit an der Oberfläche der Flüssigkeit hervor.

Bringt man irgendeinen Gegenstand ins Innere des von der Spitze und der Grenzlinie der Figur bestimmten Kegelmantels, so entsteht gleich auf der Figur selber das

nicht bewegte Schattenbild dieses Gegenstandes. Besonders hervorzuheben ist die starke Anziehung, welche der Gegenstand auf sein Schattenbild ausübt, so dass bei geringer Entfernung die das Schattenbild bildende Flüssigkeit sich in dünnen Fäden erhebt und mit dem Gegenstande in Berührung tritt.

Diese Figuren lassen sich auch in mehr oder minder getreuer Weise fixiren, indem man den electricischen Strom auf einen flüssig gemachten Nichtleiter richtet, wie z. B. Talg, Harz, Paraffin u. s. w. und letztere unter dem Einflusse des Stromes erstarren lässt. Hierbei erkennt man recht deutlich, dass Paraffin meistens ein sehr schlechter Leiter ist.

Um etwaige Unterschiede in den Bewegungen aufzufinden, welche durch das Ausströmen entgegengesetzter Electricitäten hervorgebracht werden, kann man zwei verticale Spitzen mit den Conductoren der Holtz'schen Maschine verbinden und so die beiden Electricitäten zu gleicher Zeit parallel zu einander auf dieselbe Metallplatte hinüberführen. Ein merklicher Unterschied in den respectiven Bewegungen tritt jedoch nicht hervor. Zwischen den beiden Figuren erhebt sich eine neutrale Flüssigkeitsschicht, welche sich nicht entfernen lässt, auch dann nicht, wenn man durch Annähern und Verstellen der Spitzen es absichtlich dahin bringen will, dass die Figuren ineinander übergreifen.

Zerlegt man eine Spitze in mehrere andere, so bildet jede für sich eine getrennte Figur und die so entstandenen Elementarfiguren halten sich ebenfalls getrennt von einander.

Wird die Oelschicht der Doppelfigur etwas dicker, so werden Luftbläschen vom Strome mit hineingerissen, welche sich dann im Innern des Oeles gewissen Linien entlang bewegen, die an die magnetischen Kraftlinien erinnern. Dem Rücken der neutralen Oelschicht entlang, welche beide Figuren trennt, zieht sich dann eine wellenförmig

sich  
bläse  
schw  
man  
Flas  
welc  
lässt  
scha  
eine

kan  
Luf  
such  
stro  
mer  
übt  
reic  
in  
gan

Iso  
die  
sich  
Er  
Sp  
An  
gel  
gle  
gle  
ka  
in  
tie  
An  
let

sich bewegende horizontale Linie, in welcher diese Luftbläschen sich theilweise zu vereinigen scheinen.

Diese Erscheinungen können schon durch eine relativ schwache Electricitätsquelle hervorgebracht werden. Setzt man z. B. die beiden Belege einer geladenen Leydener Flasche mit zwei isolirten Metallplatten in Verbindung, welche mit einer dünnen Oelschicht überzogen sind, so lässt sich die successive Entladung der Flasche veranschaulichen, indem man den beiden Platten abwechselnd eine mit der Erde verbundene Spitze nähert.

## II.

Was jetzt die Bewegung der Flüssigkeit anbelangt, so kann sie unmöglich dem von der Spitze fortgeschleuderten Luftstrome allein zuzuschreiben sein. Ein directer Versuch mit der Wage zeigt auch deutlich, dass dieser Luftstrom wirklich existirt und durch denselben ein zwar merkbarer Druck auf die darunter liegende Platte ausgeübt wird, dass dieser Strom aber bei weitem nicht ausreicht, um die lebhaften Bewegungen zu erzeugen, welche in der Flüssigkeit hervortreten. Eine Erklärung des Vorganges liegt jedoch nahe.

Die nichtleitende Flüssigkeitsschicht ersetzt hier den Isolator einer Franklin'schen Tafel, deren Belege durch die Metallplatte einerseits und die über die Flüssigkeit sich ausbreitende Luftschicht andererseits gebildet werden. Ersterer wird die Electricität direct, letzterer mittelst der Spitze unter dem Einflusse der Metallplatte zugeführt. Die Anziehung, welche die auf beiden Seiten der Flüssigkeit gelagerten Electricitäten aufeinander ausüben, ist aber gleich stark und muss sich daher nach aussen hin ausgleichen. Wegen der Beweglichkeit der Flüssigkeit jedoch kann die obere Luftschicht an Stellen grösster Attraction in dieselbe eindringen; daher die trichterförmigen Vertiefungen, welche meistens in sehr feine Spitzen auslaufen. Auf welche Art die electricische Ausgleichung zwischen letzteren und der Metallplatte stattfindet, ob auf ähnliche



Art wie in der Luft durch Flüssigkeitsfäden oder durch äusserst feine Luftcanäle, welche bis zur Platte dringen, mag dahingestellt bleiben; sicher ist, dass man zum öfters in der Flüssigkeit eine Unzahl ganz kleiner Körper entdeckt, welche sich lebhaft von oben nach unten und in umgekehrter Richtung bewegen und daher wenigstens zum Theil den electricischen Ausgleich vermitteln.

Das Entstehen der Vertiefungen setzt schon eine ungleichmässige Vertheilung der Electricität auf der Oberfläche der Flüssigkeit voraus, und diese Ungleichmässigkeit wird durch den Vorgang noch befördert, wodurch sowohl das Verschwinden schon bestehender und das gleichzeitige Auftauchen neuer Vertiefungen als deren Bewegungen von den Orten grösseren zu denen geringeren Widerstandes hinlänglich erklärt werden.

Ebenso mag man eine plausible Erklärung finden für das Verhalten der schlecht leitenden Flüssigkeiten auf Halbleitern, wie Papier, Seidezeug u. s. w. Giesst man nämlich eine solche Flüssigkeit auf einen dieser Halbleiter, welchem die negative Electricität durch einen Draht zugeführt wird, der in einer Spitze oder Kugel endigt, welche die untere Fläche des Halbleiters berührt oder doch nahezu so, währenddem die positive Electricität durch eine vertical über der unteren angebrachten Spitze auf die so hergestellte Franklin'sche Tafel ausströmt, so wird die Flüssigkeit nicht mehr von der Mitte nach den Rändern hin weggetrieben; sie häuft sich im Gegentheile über dem unteren Pole an und zieht sich von den Rändern nach der Mitte hin. Ihre Bewegung ist also der anfänglich beschriebenen gerade entgegengesetzt und zwar ist jetzt die Flüssigkeitsschicht in der Mitte der Figur bei weitem am dicksten. Doch auch hier ist die Flüssigkeit in heftiger Aufwallung und wird sie von zahlreichen Vertiefungen durchdrungen.

Wegen der schlechten Leitungsfähigkeit des Halbleiters ist die Vertheilung der Electricität auf der unteren Fläche ganz anders als bei einer Metallplatte, wo sie sich



vorzugsweise nach dem Rande hin zu verbreiten sucht und daher die Flüssigkeit eher von dem Mittelpunkte wegzieht.

Hier jedoch ist die Electricität des unteren Beleges vorzugsweise um den Endpunkt des Drahtes angehäuft. Durch die Wirkung der Spitze indess wird die positive Electricität auf einen grösseren Kreis hin vertheilt und die dadurch electricisirten Flüssigkeitstheilchen werden nothwendigerweise nach dem Mittelpunkte hingezogen.

Eine erste Folge obiger Versuche ist wohl die Entbehrlichkeit des einen Beleges der Condensatoren und dessen Ersetzung durch eine oder mehrere Spitzen. Bei Vorlesungsversuchen mag diese Einrichtung immerhin von Nutzen sein. Ersetzt man z. B. den oberen Beleg einer Franklin'schen Tafel durch eine nahe an der Mitte derselben endende Spitze, so schlägt bei der Entladung ein ziemlich starker Funke von der Spitze auf das Glas über, der sich hier nach allen Richtungen hin verästelt und verzweigt. Die so entstandene Lichtfigur kann man auch fixiren, indem man vorher die Tafel mit Kohlenpulver bestreut.

Wirklich schön werden aber die Lichteffecte, wenn man ziemlich grosse Kochflaschen auswendig mit einem relativ kleinen Stanniolbelege bedeckt, inwendig mit einer Spitze versieht, die Luft so weit als möglich auspumpt und selbe dann als Condensatoren gebraucht. Zu Vorlesungsversuchen möchten die so hergestellten Flaschen besonders zu empfehlen sein.

Electricische Lichtbilder lassen sich leicht mittelst Anwendung einer vielfach getheilten Spitze als Beleg einer Franklin'schen Tafel herstellen, sowie man denn auch die durch Spitzen erhaltenen Lichteffecte benutzen kann, um verschiedene Eigenschaften der Electricität auf frappante Weise zu veranschaulichen.

### III.

Da, wie vorhin bemerkt, die Anziehungskraft zwischen den beiden Belegen der Franklin'schen Flüssigkeitstafel

gleich ist, so muss, geeignetenfalls, der untere Beleg dieser Anziehungskraft ebenso folgen, wie der obere.

Nimmt man daher als unteren Beleg anstatt einer Metallplatte eine leitende Flüssigkeit, wie Wasser, so tritt die Erscheinung in umgekehrter Art hervor. Zuerst geräth die Oberfläche des Wassers in unregelmässige wellenförmige Bewegung; dann erheben sich zahlreiche Wasserkegel, welche alle oben spitz zulaufen und mehr oder weniger hoch in die nichtleitende Flüssigkeit hinauftragen. Lässt man die isolirende Schicht allmählich dicker werden, so wird die Zahl dieser Kegel immer geringer, währenddem die bleibenden an Ausdehnung zunehmen, so dass sie zuletzt mehrere Centimeter hoch in die darüber lagernde Flüssigkeit hinauftragen. Von den Spitzen derselben werden beständig Kügelchen nach oben geschleudert, was der Erscheinung das Aussehen von Miniaturvulcanen gibt, die sich in voller Thätigkeit befinden. Zumeist sind diese Vulcane auch in beständiger Drehung begriffen, die jedoch keinen bestimmten Gesetzen zu gehorchen scheint.

Wenn man Quecksilber als unteren Beleg gebraucht und Petroleum als schlechtleitende Flüssigkeit, so geht die Erscheinung durch andere Phasen. Zuerst geräth das Petroleum in heftige, auffallende Bewegung, woran das Quecksilber keinen Antheil zu nehmen scheint; dann wird es selber an der Oberfläche von der Bewegung ergriffen; bald lösen sich zahllose Quecksilberkügelchen von demselben ab, dringen durch das Petroleum hindurch und verbreiten sich auf eine grosse Entfernung um den Apparat herum und bilden so einen electrischen Quecksilberregen. Wird die Spitze noch weiter entfernt und die Petroleumschicht noch dicker, so hört der Regen bald auf und das Quecksilber kehrt anscheinend zur Ruhe zurück. Es dringen dann aber einige wenige Luftkegel von oben tief in die isolirende Flüssigkeit hinein.

Eine Franklin'sche Tafel lässt sich ebenfalls aus drei Flüssigkeiten herstellen, wie z. B. Wasser, Terpentinöl und

Alcohol. Um die Leitung den Wänden des Gefäßes entlang zu vermindern, kann man die obere Flüssigkeit in einen an beiden Enden offenen Glaszylinder einschliessen, welcher einige Millimeter in das schlechtleitende Oel eindringt. In diesem Falle combiniren sich dann die verschiedenen Erscheinungen. Auf- und absteigende Kegel treten auf und bald verbirgt ein dichter Staubregen dem Auge den Vorgang im Innern.

Ob die vorhin beschriebenen Bewegungen in irgend welcher Beziehung zu gewissen atmosphärischen Erscheinungen stehen, mag dahingestellt bleiben, denn eine gewisse Aehnlichkeit im Vorgange kann noch nicht als Beweis angesehen werden.

## IV.

Noch andere Bewegungserscheinungen lassen sich durch das Einwirken der Electricität auf Flüssigkeiten hervorbringen.

Lässt man durch den Boden eines weiten Glasgefäßes zwei Spitzen eintreten, welche mit den beiden Conductoren der Holtz'schen Maschine in Verbindung stehen, giesst Petroleum in das Gefäß bis es die Spitzen etwas bedeckt, so wird letzteres wie immer durch den electrischen Strom in heftige Bewegung versetzt. Bald aber erhebt sich vom negativen Pole ein Flüssigkeitsstrahl, der in verticaler Richtung meterhoch emporsteigen kann, währenddem die positive Spitze, einem Mörser ähnlich, kleine Bomben nach dem negativen Pole hinüberwirft. Zugleich zieht sich eine etwas erhöhte Schicht senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Spitzen, fast in der Mitte derselben, durch die Flüssigkeit hin, welche mit der neutralen Schicht der oben beschriebenen Doppelfigur in Beziehung zu stehen scheint. Der Strahl erhält sich auch dann noch, wenn das Niveau der Flüssigkeit schon merklich unter das Ende der Spitze herabgesunken ist. Seitwärts und rückwärts übt die Spitze also eine starke Anziehung aus, nach vorne jedoch bekundet sie eine bedeutende Abstossung.

Dieselbe neutrale Schicht, von der soeben Erwähnung

gethan, findet man auch, wenn die beiden Electricitäten in horizontaler Richtung gerade auf einander zu ausströmen, und man dem Strome ein mit einer isolirenden Flüssigkeit gefülltes Glasgefäß nähert. Lässt man kleine, cylinderförmige Körper, welche an einem seidenen Faden aufgehängt sind, zwischen den Spitzen auf der Flüssigkeit schwimmen, so nehmen sie bald eine axiale, bald eine äquatoriale Stellung den Spitzen gegenüber ein. Die guten Leiter nehmen entschieden die axiale und die schlechten die äquatoriale Stellung, indessen die Halbleiter unentschieden zwischen beiden Stellungen schwanken.

Auch wenn man die Flüssigkeit entfernt, zeigen die Körper in der Luft dasselbe Verhalten, obschon dann bei etwas starkem, unregelmässigem Strome die schlechten Leiter in eine Drehbewegung gerathen und in derselben verharren.

Luxemburg, im Februar 1878.

#### V. *Magnetische Experimentaluntersuchungen;* *von Carl Fromme.*

(Der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen im Auszuge mitgetheilt am 5. Mai / 4. August 1877.)

##### Zweite Abhandlung.

In Pogg. Ann. Ergbd. VII. p. 390—430 habe ich eine erste Arbeit: Untersuchungen über den Magnetismus von Stahlstäben, veröffentlicht. In der gegenwärtigen und einer weiteren, demnächst erscheinenden, sollen theils Fragen, die in der ersten nur unvollkommene Beantwortung fanden, endgültig gelöst, theils auch neue Erscheinungen in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden. Alle Resultate der ersten Abhandlung waren mit Stahlstäben gewonnen worden. Die Untersuchung ist nun auch auf weiches Eisen ausgedehnt, und auch insofern bilden die jetzt zu veröffentlichenden Ergebnisse eine Ergänzung der früheren Arbeit. Im Uebrigen beschränkt

sich aber auch diese Untersuchung auf weiche, ungehärtete Körper, welche immer nur in einer einzigen Richtung von den magnetisirenden Kräften erregt werden.

**Apparate und Methode.** Ein magnetisirter Stahlreif mit Spiegel, am Coconfaden aufgehängt und in einem kupfernen Dämpfer schwebend, diente als Magnetometer. Südlich von demselben liegt zum Meridian senkrecht die Magnetisirungsspirale, nördlich eine Compensationsspirale. Der Strom wird durch Bunsen'sche (Schwefelsäure, Salpetersäure) Elemente (wo weiter nichts angegeben ist, zwei) geliefert. Die Stromleitung enthält ausserdem eine Tangentenbussole und einen Siemens'schen Rheostaten. Die magnetisirende Kraft ist das 41,1272fache der Stromstärke, der Radius der aus zwei Windungen bestehenden Tangentenbussole ist 401,6 mm. Die Entfernung der Scala von der Tangentenbussole ist 1351 mm, die der Scala vom Magnetometer bei den einzelnen Versuchsreihen nicht ganz gleich, jedoch immer sehr nahe 2300 mm.

Der zu prüfende Körper wurde erst, nachdem der Strom geschlossen war, langsam in die Spirale eingeschoben und ebenso langsam aus der Spirale entfernt, bevor der Strom unterbrochen wurde<sup>1)</sup>. Die Befestigung desselben in der Spirale war eine durchaus zuverlässige, dabei Länge und Weite der Spirale von der Art, dass der von dem Körper eingenommene Raum ein homogenes magnetisches Feld bildete.

**Material.** Die Eisen- und Stahlkörper waren von cylinderischer Gestalt, an den Enden zugespitzt. Ihre Länge variirte von 140—220 mm, ihre Dicke von 1,5—8 mm. Untersucht wurden etwa 30 verschiedene Stäbe.

**Abkürzungen.** Es bedeutet:

*sc* Scalentheile.

*i* Stromstärke, wenn nicht *sc* beigesetzt, in absolutem magnetischem Maass.

*T* Die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus.

1) Drei Versuchsreihen ausgenommen. S. III., 2. Tab. 34 u. 35.

- E** Die Entfernung der Magnetisirungsspirale vom Magnetometer.
- L, D u. A** Länge, Dicke und spezifisches Gewicht des Stabes.
- GM** Den ganzen von einer Kraft inducirten Magnetismus.
- RM** Den remanenten Magnetismus, einschliesslich des Theiles, welcher von der Wirkung früherer Kräfte herrührt.
- TM** Den verschwindenden, temporären Magnetismus, nämlich  $TM = GM - RM$ .
- I** Impuls. Ein angehängter Index 1, 2 ... bezeichnet die Ordnungszahl.  $GM_1$  ist also der durch den 1. Impuls  $I_1$  einer Kraft erzeugte ganze Magnetismus. Das Fehlen des Index zeigt an, dass eine grosse Zahl von Impulsen erfolgt ist.
- W** Leitungswiderstand im Rheostaten.

I. Verhalten von  $GM$ ,  $RM$  und  $TM$  bei wiederholter Einwirkung einer constanten Kraft. — Einfluss vorhergegangener kleinerer Kräfte.

Tabelle 1. Stahlstab. Ausgeglüht.

$I$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
1.	729,4	226,0	503,4	464,4
2.	713,3	238,0	475,3	464,4
3.	707,5	243,8	463,7	464,2
4.	706,0	247,4	458,6	464,4
10.	705,2	253,5	451,7	463,2
20.	702,5	255,4	447,1	463,0
30.	703,2	256,6	446,6	462,3.

Tabelle 2. Stahlstab, ausgeglüht.  $I = 148$ .  $D = 2,53$ .  
 $A = 7,756$ .  $E = 200,1$ .

$I$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$	$\frac{RM}{i}$	$\frac{TM}{i}$
1.	163,5	59,0	104,5	98,8		
2.	164,5	61,6	102,9	98,9		
6.	166,1	64,6	101,5	98,7		
9.	166,0	65,8	100,2	98,8	$1138.10^3$	$1733.10^3$ .

<i>I</i>	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$	$\frac{RM}{i}$	$\frac{TM}{i}$
1.	287,2	130,0	157,2	138,0		
2.	288,0	136,2	151,8	138,2		
8.	290,2	141,9	148,3	137,2		
12.	291,6	144,0	147,6	137,3	1800.10 <sup>2</sup>	1845.10 <sup>2</sup> .
1.	371,8	181,7	190,1	163,7		
2.	374,4	187,6	186,8	163,5		
8.	377,2	194,7	182,5	163,4		
12.	377,9	197,1	180,8	163,1	2076.10 <sup>2</sup>	1905.10 <sup>2</sup> .
1.	494,2	246,6	247,6	201,2		
2.	495,2	256,6	238,6	201,2		
8.	500,4	269,0	231,4	200,9		
12.	500,5	270,8	229,7	200,7	2322.10 <sup>2</sup>	1971.10 <sup>2</sup> .
1.	698,5	342,7	355,8	264,0		
2.	697,0	355,6	341,4	264,1		
8.	698,7	374,6	324,1	263,7		
12.	703,3	380,9	322,1	263,2	2496.10 <sup>2</sup>	2115.10 <sup>2</sup> .

Tabelle 3. Stahlstab, ausgeglüht.  $L = 149,3$ .  $D = 3,52$ .  
 $\Delta = 7,78$ .

$E = 200,1$ .  $W = 6$ .

<i>I</i>	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
1.	622,9	228,2	394,7	192,1
2.	623,2	242,9	380,3	192,1
8.	632,2	256,1	376,1	191,9

$E = 306,0$ .  $W = 1$ .

<i>I</i>	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
		75,9		
1.	633,7	246,7	387,0	468,2
2.	628,7	258,2	370,5	467,9
7.	628,2	273,7	354,5	467,3

Tabelle 4. Stahlstab, ausgeglüht.  $L = 150$ .  $D = 4,9$ .  
 $\Delta = 7,82$ .  $E = 358$ .

$W = 2$ .

<i>I</i>	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
1.	587,3	222,5	364,8	363,8
2.	574,6	234,1	340,5	363,6
3.	573,3	240,6	332,7	363,6
10.	570,9	249,3	321,6	361,5
15.	568,3	250,3	318,0	362,1

$W = 1,7$ .

<i>I</i>	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
1.	604,8	252,3	352,5	389,7
2.	606,8	254,0	352,0	389,5
8.	608,2	257,9	350,3	387,7

Tabelle 5. Stahlstab, aus dem nämlichen Stück wie der vorige geschnitten und in den Dimensionen diesem gleich.

$E = 306,0.$							$E = 360,0.$						
$W$	$I$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$		$W$	$I$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$	
15.	1.	178,0	69,2	108,8	95,9		3.	1.	724,0	292,8	431,2	300,0	
	2.	177,5	74,8	102,7	95,6			2.	719,0	302,0	417,0	300,5	
	7.	179,2	81,2	98,0	95,3			14.	723,0	324,5	398,5	298,6	
10.	1.	269,9	114,8	155,1	132,5		$E = 358,0.$						
	2.	270,2	120,4	149,8	132,3		2.	1.	566,7	222,2	344,5	365,1	
	9.	269,7	125,3	144,4	132,4			2.	564,7	228,3	336,4	364,2	
6,5.	1.	403,5	171,0	232,5	184,0		11.	564,5	238,7	325,8	362,7		
	2.	403,0	178,5	224,5	184,3		1.	1.	732,5	264,0	468,5	468,6	
	11.	407,0	192,0	215,0	183,5			2.	732,7	271,0	461,7	467,6	
4,5.	1.	549,5	233,2	316,3	235,9			11.	732,0	279,0	453,0	467,7	
	2.	550,5	242,5	308,0	235,7								
	14.	547,1	264,9	282,2	236,2								

Tabelle 6. Stahlstab, ausgeglüht.

$E$	$W$	$I$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
$rm=54,9$						
254,9	15.	1.	321,0	142,0	179,0	92,8
		2.	319,8	149,2	170,6	—
		3.	319,0	151,2	167,8	—
$rm=151,2$						
	12.	1.	386,6	173,5	213,1	111,8
		2.	388,6	179,0	209,6	—
		3.	389,6	181,5	208,1	—
		4.	389,8	182,7	207,1	—
$rm=105,5$						
306,0	3.	1.	736,5	277,5	459,0	290,8
		2.	728,6	297,2	431,4	—
		3.	726,4	301,5	424,9	—
		4.	726,5	305,0	421,5	—



<i>E</i>	<i>W</i>	<i>I</i>	<i>GM</i> <sub>sc</sub>	<i>RM</i> <sub>sc</sub>	<i>TM</i> <sub>sc</sub>	<i>i</i> <sub>sc</sub>
<i>rm</i> = 192,8						
358,0	2.	1.	557,5	213,4	344,1	355,0
		2.	557,8	219,6	338,2	—
		3.	557,1	222,7	334,4	—
<i>rm</i> = 148,2						
409,6	0.	1.	664,2	194,0	470,2	mehr als 500
		2.	658,7	202,5	456,2	—
		3.	657,3	205,6	451,7	—
		4.	656,8	207,7	449,1	—

Tabelle 7. 2 Stahlstäbe, aus dem gleichen Stück geschnitten und von gleichen Dimensionen, der gleichen Kraft unterworfen, der eine sofort nach dem Glühen, der zweite, nachdem erst eine Reihe von kleineren Kräften gewirkt hatte.

I. <i>rm</i> = 18,2 <sup>sc</sup>	<i>RM</i> <sub>1</sub> = 454,2	<i>RM</i> <sub>2</sub> = 475,0	<i>RM</i> = 520,4
II. = 389,4	= 460,2	= 479,0	= 516,6.

Tabelle 8. 2 Stahlstäbe, aus dem gleichen Stück und von gleichen Dimensionen.

I. Ausgeglüht.						II. Ausgeglüht.		
Den Kräften $W = 10$ und $W = 5$ unterworfen.						$rm = 0$ .		
$rm = 116$ .								
		$I_1$	$I_2$	$I_{10}$		$I_1$	$I_2$	$I_{10}$
$W = 2$ .	$GM$	536,0	528,5	527,5		550,0	538,2	529,8
	$RM$	172,0	182,2	192,5		164,0	178,0	192,0
	$TM$	364,0	346,3	335,0		386,0	360,2	337,8.

Beide ausgeglüht.						II. Den Kräften $W = 10$ und $W = 5$ unterworfen.		
I.						$rm = 121$ .		
		$I_1$	$I_2$	$I_{10}$		$I_1$	$I_2$	$I_{10}$
$W = 2$ .	$GM$	556,4	542,8	537,5		547,6	542,2	535,3
	$RM$	178,4	191,2	203,7		182,7	191,5	203,0
	$TM$	378,0	351,6	333,8		364,9	350,7	332,3.

Die vorstehend mitgetheilten Tabellen, welche — ebenso wie die später anzuführenden — einen Theil eines reicheren Beobachtungsmaterials bilden, geben folgende Gesetze:

Der von einer constanten Kraft, welche grösser ist als alle vorhergegangenen, inducirte Gesamtmagnetismus  $GM$  bewahrt bei wiederholten Impulsen derselben im allgemeinen niemals einen constanten Werth, sondern weicht von dem des ersten Impulses sowohl im Sinne einer Abnahme als einer Zunahme ab. Wird der ausgeglühte Stab sofort einer grossen Kraft unterworfen, so zeigt sich gewöhnlich die Abnahme (Tab. 1, Tab. 4,  $W=2$ ), folgt dagegen die Kraft einer nur wenig kleineren, so tritt Zunahme ein (Tab. 2, Tab. 4,  $W=1,7$ ). Es hängt nur von der Grösse (und der Zahl der Impulse) der nächst vorhergegangenen Kraft  $p$  ab, ob bei folgenden Impulsen einer Kraft  $P$   $GM$  ab- oder zunehmen soll. In Tab. 3 war die erste Kraft nicht gross genug, um eine Abnahme hervorzurufen. Dieselbe zeigt sich aber sofort, als die Kraft auf über das Doppelte,  $RM$  mehr als dreifach gesteigert wird. In Tab. 4 nimmt bei  $W=2$   $GM$  stark ab, in Tab. 5 dagegen, wo auf den gleichgestalteten Stab vor  $W=2$  erst  $W=3$  gewirkt hatte, entfernt es sich wenig von einem constanten Werth. In Tab. 6 endlich ist das ungleiche Verhalten von  $GM$  durch eine möglichst ungleichmässige Steigerung der Kräfte zur Anschauung gebracht. Es geben  $W=15$ , die erste Kraft,  $W=3$  und  $W=0$  die Abnahme,  $W=12$  die Zunahme, bei  $W=2$  ist  $GM$  so gut wie constant.

Die Abhängigkeit von den vorhergegangenen kleineren Kräften ist nicht der Art, dass die starke Abnahme bei sofortiger Wirkung einer grossen Kraft sich nur auf die ihr vorhergehenden kleineren Kräfte vertheilt, sie ist vielmehr im letzteren Falle in Summa immer geringer und kann sich sogar in Zunahme verwandeln.

$RM$  nimmt bei folgenden Impulsen immer zu, wie schon zur Genüge bekannt, und zwar in jedem Falle mehr, als  $GM$ . Da aber  $GM - RM = TM$ , so ist mit der Zunahme des  $RM$  stets eine Abnahme des  $TM$  bei folgenden Impulsen verbunden. Die Grösse derselben ist, von sonstigen Faktoren abgesehen, abhängig von der Grösse der zuletzt

zur V  
Null

gema  
änder  
ist m  
Es is  
werde  
Abna  
mit  
Wert  
Kraft  
Zwisc  
würde  
kann  
sehr  
wiede  
einen  
erreic

dass  
Impu  
sicht  
welch  
kung

E

Tab

$W$

15

10

6,5

4,5

3

2

1

zur Wirkung gekommenen Kraft  $p$ . Sie convergirt gegen Null mit der Differenz  $P-p$  (Tab. 4).

Die Annahme, welche bisher immer stillschweigend gemacht wurde, dass die Wirkung einer Kraft nicht geändert wird durch vorherige Wirkung kleinerer Kräfte, ist nur unter einer bestimmten Einschränkung richtig: Es ist nöthig, dass so viele Impulse der Kraft angewandt werden, dass keine Steigerung des  $RM$ , also auch keine Abnahme des  $TM$  mehr erfolgt. Ist aber die Sättigung mit  $RM$  erreicht, so besitzen  $GM$ ,  $RM$  und  $TM$  die Werthe, welche sie auch durch häufige Impulse der Kraft, wenn dieselbe sofort nach dem Ausglühen ohne Zwischenkunft kleinerer Kräfte erfolgten, erhalten haben würden. Die Wirkung des ersten Impulses einer Kraft kann, je nach der Grösse der vorhergegangenen Kräfte, sehr verschieden ausfallen, werden die Impulse aber häufig wiederholt, so nähern sich die  $GM$ , die  $RM$ , die  $TM$  jede einem bestimmten Werth, welcher beim Sättigungsimpuls erreicht wird. (Tab. 4 und 5,  $W=2$ . Tab. 7, Tab. 8.)

Diese Gesetze zeigen, von welcher Wichtigkeit es ist, dass eine magnetisirende Kraft mit einer grossen Zahl von Impulsen einwirke, dass nur die letzten derselben berücksichtigt werden dürfen, wenn eine Reihe von Kräften, welche nacheinander einen Stab erregen, in ihren Wirkungen vergleichbar sein soll.

#### Einfluss der Grösse der Kraft auf die beschriebenen Erscheinungen.

Tabelle 9. Die Beobachtungsdaten sind in Tabelle 5 gegeben.

$W$	$\frac{RM}{i}$	$\frac{TM}{i}$	$\frac{RM_1}{RM}$	$\frac{RM_2}{RM}$	$\frac{TM}{TM_1}$	$\frac{TM}{TM_2}$
15	4715.10 <sup>2</sup>	5690.10 <sup>2</sup>	0,852	0,921	0,901	0,954
10	5295	6100	0,916	0,960	0,930	0,964
6,5	5868	6568	0,891	0,930	0,925	0,958
4,5	6306	6714	0,880	0,925	0,900	0,916
3	6101	7474	0,900	0,931	0,924	0,956
2	5846	7961	0,930	0,957	0,946	0,970
1	5402	8720	0,947	0,971	0,967	0,980

Tabelle 10. Stahlstab, ausgeglüht.  $L=148$ .  $D=1,48$ .  
 $A=7,75$ .

$i_{sc}$	$\frac{RM}{i}$	$\frac{TM}{i}$	$\frac{TM}{TM_1}$	$\frac{TM}{TM_2}$
95,5	906	1042	0,957	0,995
145,8	1366	1083	0,898	0,950
185,2	1510	1130	0,911	0,949
240,7	1548	1143	0,890	0,944
303,6	1473	1152	0,916	0,973
371,2	1324	1161	0,956	0,986
481,2	1125	1119	0,970	0,990

Tabelle 11. Eisenstab, ausgeglüht.  $L=200$ .  $D=2,61$ .  
 $A=7,65$ .

$i_{sc}$	31,5	72,5	129,5	214,0	357,0
$\frac{RM}{i}_{sc}$	0,70	1,70	1,40	0,99	0,68
$\frac{TM}{i}_{sc}$	1,175	1,448	1,927	2,028	1,090
$\frac{RM_1}{RM}$	0,773	0,919	0,933	0,948	0,980
$\frac{TM}{TM_1}$	0,974	0,905	0,945	0,967	0,988

Tabelle 12. Eisenstab, ausgeglüht.  $L=200$ .  $D=3,5$ .

$\frac{RM}{i}_{sc}$	1,424	1,837	2,461	2,980	2,931
$\frac{RM_1}{RM}$	0,878	0,874	0,863	0,862	0,887

Tabelle 13. Stahlstab, ausgeglüht, gut ellipsoidisch  
abgeschliffen.  $L=147,8$ .  $D=6,94$ . Masse = 33,142 gr.  
 $A=7,826$ .

$i$	$\frac{RM_1}{T \cdot 10^2}$	$\frac{RM_2}{T \cdot 10^2}$	$\frac{RM}{T \cdot 10^2}$	$\frac{RM_1}{i \cdot 10^2}$	$\frac{RM_2}{i \cdot 10^2}$	$\frac{RM}{i \cdot 10^2}$	$\frac{RM_1}{RM}$	$\frac{RM_2}{RM}$
$rm=77$								
1,660	1320	1373	1416	1486	1546	1595	0,932	0,970
2,567	2869	3005	3170	2089	2189	2309	0,905	0,948
3,531	5211	5513	5915	2757	2917	3132	0,881	0,932
4,960	9128	9656	10533	3484	3685	4027	0,865	0,915
7,045	14970	15790	17505	3972	4190	4646	0,855	0,902
10,08	21450	22350	24210	3977	4143	4488	0,886	0,923
12,80	26190	26790	28620	3825	3913	4181	0,915	0,936
16,85	30190	30730	32045	3350	3410	3556	0,942	0,959
21,02	32660	33030	33776	2906	2939	3005	0,967	0,978
24,56	33910	34190	34256	2581	2602	2607	0,990	0,998
27,27	34470	34540	34540	2364	2368	2368	0,998	1,000

Die Ergebnisse dieser Tabelle sind auf Taf. I Fig. 4 graphisch dargestellt.

## Resultate.

Eine jede Kraft vermag zwar durch einen, 2, 3, ... Impulse das durch den ersten erzeugte  $RM$  noch zu erhöhen, aber diese Fähigkeit kommt den einzelnen in sehr verschiedenem Maasse zu. Bildet man nämlich die Quotienten  $\frac{RM_1}{RM}, \frac{RM_2}{RM} \dots$ , drückt also das vom 1, 2, ... Impuls erregte  $RM$  in Theilen des Sättigungsmomentes aus, so nehmen diese Quotienten mit von der Null an aufsteigenden Kräften von einem gemeinsamen Werthe, der Eins, an ab, indem sie sich von einander entfernen, erreichen bei der nämlichen Kraft kleinste Werthe und convergiren dann wieder sämmtlich gegen die Eins, welcher sie mit Eintritt des Maximums an remanentem Magnetismus gleich werden.

Bei meinen früheren Versuchen habe ich nur die Periode der Abnahme der Quotienten beobachtet. Eine solche ergab sich augenscheinlich, wenn unter  $RM_1, RM_2 \dots$  nur der Theil des remanenten Magnetismus verstanden war, welchen die betreffende Kraft wirklich selbst erregt hatte, also das Residuum abzüglich des von den vorhergegangenen kleineren Kräften erzeugten Theiles — ein Verfahren, welches nur bei der damals befolgten, ganz gleichmässigen Steigerung der Kräfte ein Bild der Erscheinung zu geben vermag. Dass auch dann, wenn unter  $RM$  das Gesamtresiduum verstanden wurde, die Quotienten abnahmen, hielt ich durch meine Versuche für nicht hinlänglich bewiesen und strich deshalb noch vor dem Druck der Arbeit wieder die diesbezüglichen Worte, indem ich mich begnügte, den Quotienten  $\frac{RM_1}{RM}$  als „ziemlich constant“ zu bezeichnen. Hr. Bouty veröffentlichte damals fast zu gleicher Zeit<sup>1)</sup> Versuche, welche entgegen den meinigen eine Zunahme der Quotienten mit wachsender Kraft zeigten. Ich schloss<sup>2)</sup>,

1) C. R. 1875. No. 13.

2) 1. Abh. p. 428. Meine dort dargelegte Meinung ist von Hrn. Bouty vollkommen missverstanden worden. Denn in einer neueren Abh. (Ann. de l'école normale, No. 4 u. 5. 1876) werden mir nie gehabte Zweifel an der Richtigkeit seines Resultates (der Zunahme der Quotienten) untergeschoben.

dass unsere Versuche vereinigt den Gang der Erscheinung darstellen würden, eine Vermuthung, welche durch die vorliegenden Tabellen ihre Bestätigung findet. Dieselben zeigen aber auch weiter noch, dass diejenige Kraft, für welche die Verhältnisswerthe ihre Minima aufweisen, eine ganz bestimmte Bedeutung hat: Sie fällt zusammen mit der Kraft des Wendepunktes des remanenten Magnetismus. Sobald dieser anfängt langsamer als die magnetisirende Kraft zu wachsen, beginnt auch die Wiederholung der Einwirkung der Kraft unwirksamer zu werden.

Tab. 13, deren Zahlen das Resultat sorgfältiger Beobachtungen sind, zeigt das genaue Zusammenfallen des Maximums von  $\frac{RM}{i}$  mit den Minimis von  $\frac{RM_1}{RM}$  und  $\frac{RM_2}{RM}$ . Aus der graphischen Darstellung insbesondere geht hervor, dass das Maximum von  $\frac{RM_1}{i}$  später als das von  $\frac{RM_2}{i}$ , dieses später als das von  $\frac{RM}{i}$  eintritt, und dass es das letzte ist, welches mit den Minimis der Quotienten zusammentrifft. Aus dem über den Einfluss vorher angewandter kleinerer Kräfte auf den Verlauf des  $RM$  bei wiederholten Impulsen Gesagten geht nun freilich hervor, dass die angeführten Zahlen für  $\frac{RM_1}{RM}$  oder für  $\frac{RM_2}{RM}$  eigentlich untereinander nicht vergleichbar sind, was an kleinen Unregelmässigkeiten der Curven auch zu bemerken sein muss. Aber das einzig streng richtige Verfahren, jede Kraft nur auf den von dem remanenten Magnetismus der vorhergegangenen durch Glühen befreiten Stab wirken zu lassen, ist eben wegen der Veränderungen, welche das Ausglühen in Form und Struktur hervorbringt, nicht anwendbar.

Abgesehen von dem nicht ganz regelmässigen Verlaufe der Quotienten, welcher eine erste nothwendige Folge des benutzten Verfahrens ist, bleibt als zweite noch der Umstand zu erwähnen, dass sämmtliche Werthe — die aus der Wirkung der ersten Kraft abgeleiteten allein ausgenommen, dieselben erscheinen gegen die folgenden häufig so viel kleiner, dass sie aus der Reihe heraus treten —

grösser sind, als wenn eine jede Kraft den Stab im ausgeglühten Zustande vorgefunden hätte. Wären solche Unregelmässigkeiten zu vermeiden, so würde man finden, dass bei einem jeden Stab  $\frac{RM_1}{RM} \left( \frac{RM_2}{RM} \dots \right)$  die gleiche Werthreihe durchläuft, das gleiche Minimum bei der Kraft des Wendepunktes annimmt. Was bei verschiedenen Stäben verschieden ist, das ist allein die Schnelligkeit des Abfallens zum Minimum und des Aufsteigens wieder zur Einheit. Dasselbe, was von der Lage des Wendepunktes und des Maximums des  $RM$  bei verschiedenen harten und gestreckten Stäben gilt, überträgt sich ohne Weiteres auf die hier beschriebene Erscheinung.

Mit der Zunahme des  $RM$  bei wiederholten Impulsen einer constanten Kraft geht Hand in Hand eine Abnahme des  $TM$ . Auch diese ist mit der Grösse der Kraft veränderlich und zwar nach demselben Gesetz, welches  $RM$  befolgt. Drückt man den (kleinsten) Grenzwert  $\frac{TM}{RM}$  in Theilen von  $TM_1, TM_2 \dots$  aus, so nehmen  $\frac{TM}{TM_1}, \frac{TM}{TM_2} \dots$  mit wachsender Kraft von der Eins an bis zu kleinsten Werthen ab, um wieder gegen die Eins zu convergiren. Da auch der Eintritt der Minima dieser Quotienten mit denen von  $\frac{RM_1}{RM}, \frac{RM_2}{RM} \dots$  zugleich erfolgt, nämlich bei dem Wendepunkte des remanenten Magnetismus, so ist damit bewiesen, dass die Abnahme des  $TM$  allein durch die Zunahme des  $RM$  bedingt ist, dass also der von einer Kraft inducirte verschwindende Magnetismus in einer tieferen Abhängigkeit von dem gleichzeitig erzeugten remanenten steht. Man wird hieraus weiter schliessen müssen, dass die verschieden grosse Abnahme des  $TM$  bei verschiedener Grösse der nächst vorhergegangenen Kraft  $p$  eine directe Folge des von dieser erregten remanenten Magnetismus ist. An die Stelle der Differenz der Kräfte  $P - p$  (s. früher), mit welcher die Abnahme des  $TM$  gegen die Null convergirt, ist also wohl richtiger die Differenz der remanenten Magnetismen der beiden Kräfte  $RM - rm$  zu setzen.



## II. Einfluss grösserer Kräfte auf zeitlich folgende kleinere.

## 1. Magnetische Nachwirkung.

Der Einfluss grösserer Kräfte auf nachfolgende kleinere werde zunächst unter der vereinfachenden Voraussetzung untersucht, dass das *RM* von einer gewissen unveränderlichen Grösse gedacht wird. Sei also ein Stab magnetisirt durch eine Kraft, welche die zur Untersuchung kommenden an Grösse übertrifft, so lassen alle Kräfte das *RM* des Stabes unverändert.

Der Einfluss einer grösseren Kraft auf eine nachfolgende kleinere offenbart sich dann in der Weise, dass das *TM* dieser bei wiederholten Impulsen nicht constant bleibt, sondern bis zu einem kleinsten Werthe abnimmt<sup>1)</sup>. Diese Abnahme soll als Nachwirkung der grösseren Kraft (*N*) bezeichnet werden.

Tabelle 14. Eisenstab.

Magnetisirt mit <i>W</i> = 0.				Ein Impuls mit <i>W</i> = 3.			Ein Impuls mit <i>W</i> = 9.		
<i>W</i> = 20.	<i>I</i>	<i>TM<sub>sc</sub></i>	<i>N</i>	<i>I</i>	<i>TM<sub>sc</sub></i>	<i>N</i>	<i>I</i>	<i>TM<sub>sc</sub></i>	<i>N</i>
	1.	409,0		1.	404,6		1.	401,4	
	2.	402,7	6,3	2.	400,3	4,3	2.	399,4	1,7
	5.	397,0	5,7	5.	396,6	3,7	5.	396,8	2,9
	8.	395,4	1,6	8.	395,1	1,5	8.	396,1	0,7
		$\Sigma$ 13,6				$\Sigma$ 9,5			$\Sigma$ 5,3

Tabelle 15 und 16. Eisenstab. Es wird untersucht die Einwirkung von *W* = 14, 9, 5, 3, 0 auf *W* = 20 resp. von *W* = 30, 20, 14, 9, 5, 3, 0 auf *W* = 50. Der constante Endwerth des *TM* bei *W* = 20 ist 383,2<sup>sc</sup>, gemessen in *E* = 255, der von *W* = 50 *TM* = 158,65<sup>sc</sup>. Die in den Tabellen angegebenen *TM* der Kräfte, sind sämmtlich in *E* = 461 gemessen. *N* bedeutet die gesammte Nachwirkung, welche

1) Ich muss bemerken, dass ein solcher Einfluss schon von Hrn. Herwig (Pogg. Ann. CLVI p. 439) wahrgenommen, aber nicht weiter verfolgt ist.

von *W**W TM*

20 68,

14 94,

9 134,

5 196,

3 250,

0 399,

Tabelle

nämlich

*W* = 30

Tabelle

nämlich

Tabelle



von  $W = 14, 9, \dots$  herrührend, an dem  $TM$  von  $W = 20$   
resp. 50 sich zeigt.

$W$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$	$\frac{TM}{i}$	$N$	$\frac{N}{di}$	$\frac{N}{dTM}$
20	68,2	65,4	1,05	—	—	—
14	94,2	85,0	1,11	4,3	0,22	0,17
9	134,3	114,0	1,18	7,5	0,15	0,11
5	196,3	156,6	1,25	8,1	0,09	0,06
3	250,7	193,4	1,30	8,5	0,07	0,05
0	399,5	297,4	1,34	11,3	0,05	0,03

$W$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$	$N$	$\frac{N}{di}$	$\frac{N}{dTM}$
50	29	29	—	—	—
30	46	46	2,8	0,16	0,16
20	67	64	2,5	0,07	0,07
14	92	83	3,1	0,06	0,05
9	131	110	4,7	0,06	0,04
5	192	152	5,7	0,05	0,04
3	245	187	5,8	0,04	0,03
0	391	290	7,1	0,03	0,02

Tabelle 17. Eisenstab. Die grössere Kraft ist die gleiche, nämlich  $W = 1,5$ , die kleinere Kraft ist variiert, nämlich  $W = 301,5; 101,5; 31,5; 18,5$ . Es sind immer nur zwei Impulse der kleineren Kraft gemessen.

$W$	$N_{1-2J}$	$TM_1$	$i$
301,5	0,3 <sup>sc</sup>	29 <sup>sc</sup>	6 <sup>sc</sup>
101,5	1,75	87	16
31,5	5,55	274	48
18,5	6,0	450	74

Tabelle 18. Stahlstab. Die grössere Kraft ist constant, nämlich 2 Bunsen und 2 Grove  $W = 0$ , die kleinere ist 2 Bunsen  $W = 1, 2, 5, 10$ .

$W$	$TM_1$	$TM$	$N$	$i$
1	484,9 <sup>sc</sup>	476,5 <sup>sc</sup>	8,4	461 <sup>sc</sup>
2	357,0	340,9	16,1	358
5	165,7	162,0	3,7	216
10	87,3	83,8	3,5	130

Tabelle 19. Eisenstab. Die grössere Kraft ist  $W = 2$ ,  
 $i_{sc} = 357$ .

5	470,7	465,5	5,2	214
10	350,0	339,5	10,5	129,5
20	133,8	118,5	15,3	72,5
50	32,1	27,8	4,3	31,5

Tabelle 20. Eisenstab. Die Nachwirkung wird hervor-  
gebracht durch  $W=0$  und untersucht zuerst an  $W=50$ ,  
dann an  $W=20$  oder umgekehrt zuerst an  $W=20$  und  
darauf erst an  $W=50$ .

$W=0$		$W=0$		$W=0$		$W=0$		$W=0$	
$W$	$N$	$W$	$N$	$W$	$N$	$W$	$N$	$W$	$N$
50	9,3	50	9,9	20	—	20	11,9	50	8,0
20	9,6	20	10,0	50	1,7	50	0,3	20	11,3

Tabelle 21. Der gleiche Eisenstab, jedoch nach mehr-  
fachem Ausglühen etc. Die grössere Kraft ist wieder  
constant  $W=0$ , die kleineren Kräfte sind  $W=20$  und 50,  
 $W=50$  und 50,2,  $W=50$  und 50,4,  $W=50$  und 51,  $W=50$   
und 70,  $W=50$  und 120.

$W=0$				$W=0$			
		$TM_1$				$TM_1$	
$W=50$		179,5	—	$W=50$		177,4	—
20		—	421,7	0		50,2	—
0		50	175,8	—		50	—
20		—	422,4	0		50	177,5
0		50	178,4	0		50,4	—
20		—	423,1	0		50	—
0		20	—	0		51	—
20		—	424,2	0		50	—
0		50	173,8	0		50	174,0
20		—	423,0	0		70	—
0		50	173,2	0		50	—
20		—	—	0		50	176,0
0		50	173,2	0		120	—
20		—	—	0		50	—
0		50	173,7	0		—	173,5

Gesetze.

Wenn vor Anwendung einer kleineren Kraft eine  
grössere gewirkt hat, so nimmt bei Wiederholung der Im-

pulse der kleineren, obwohl  $RM$  durch dieselben nicht geändert wird,  $TM$  dennoch ab, indem es sich einem Grenzwerthe annähert. Ist derselbe erreicht, so kann man das Gleiche wiederholen, und zwar beliebig oft, wenn man wieder einen Impuls der grösseren Kraft ertheilt. Variirt man die Intensität derselben, so variirt auch der Anfangswerth  $TM_1$  der kleineren Kraft, aber bei genügender Wiederholung der Impulse wird stets der gleiche Endwerth erreicht (Tab. 14). Um  $TM$  auf diesen Werth wieder zu bringen, ist es nöthig, die Impulse zu wiederholen: eine grössere Zahl von Impulsen kann nicht ersetzt werden durch eine geringere Zahl von längerer Wirkungsdauer. Es ist ferner gleichgültig, ob man nach geschehener Einwirkung der grösseren Kraft einige Secunden oder mehrere Stunden verstreichen lässt, ehe man die kleinere verwendet: Ihr  $TM$  nimmt immer um gleichviel ab, auf das Verschwinden der magnetischen Nachwirkung ist die Zeit ohne allen Einfluss. Aber ebensowenig auf ihr Entstehen. Denn mehrere Impulse der grösseren Kraft geben nicht mehr Nachwirkung, als ein einziger, mag derselbe eine längere oder kürzere Dauer besessen haben.

Ist die Nachwirkung nur zum Theil beseitigt, hat also etwa nur ein Impuls der kleineren Kraft gewirkt, und gibt man darauf wieder einen Impuls der grösseren, so ist  $TM_1$  weder grösser noch kleiner als vorhin.

Die Nachwirkung hängt ab von der Grösse der sie erzeugenden Kraft, sie wächst mit dieser, aber langsamer. (Tab. 14, Tab. 15 und 16.) Sie ist aber weiter auch bestimmt durch die Grösse der Kraft, an welcher sie beobachtet wird. (cf. Tab. 15 und 16.) Setzt man die grössere, erzeugende Kraft constant und variirt die kleinere, prüfende, so nimmt mit Abnahme derselben  $N$  zuerst zu, erreicht ein Maximum und nimmt darauf wieder ab. (Tab. 17, 18, 19). Die magnetische Nachwirkung folgt also dem Gesetz:

$$N = c \cdot p^a (P - p)^b,$$

wo  $c$  ein Proportionalitätsfactor,  $p$  die prüfende Kraft,

$P$  die erzeugende Kraft,  $a$  und  $b$  positive Zahlen, von denen  $b$  jedenfalls ein echter Bruch ist, während ich von  $a$  unentschieden lassen will, ob es sich der Eins nicht sehr stark annähert.

$N$  ist gleich Null, sowohl für  $p=P$ , als auch für  $p=0$ , bei einer zwischen 0 und  $P$  liegenden Kraft erreicht es ein Maximum.

Eine durch einen Impuls von  $P$  erzeugte Nachwirkung kann nur durch eine noch grössere Kraft gesteigert werden. Sie wird aber vermindert durch Anwendung einer kleineren Kraft. Folgt, wie in Tab. 20, auf  $W=0$  ( $P$ ) sofort  $W=50$  ( $p$ ), so nimmt das  $TM$  dieser Kraft im ganzen um 9,3, 9,9, 8,0 ab. Lässt man aber vor  $W=50$  erst  $W=20$  wirken, so beträgt  $N$  bei  $W=50$  nur noch 1,7 und 0,3. Dabei ist es, wie der zweite Theil der Tab. 21 zeigt, gleichgültig, ob die eingeschobene Kraft  $p' > p$  oder  $p' < p$  ist: in jedem Fall wird durch Einschieben einer solchen dritten Kraft zwischen  $P$  und  $p$  die bei  $p$  auftretende Nachwirkung vermindert.

Weitere Belege zu den aufgestellten Gesetzen finden sich im Folgenden.

## 2. Beweis eines dauernden Einflusses.

Die beschränkende Voraussetzung des ersten Theils werde jetzt fallen gelassen: Die grössere Kraft wirke auch auf den remanenten Magnetismus ein. Es offenbart sich deren Einfluss auf eine nachfolgende kleinere dann einmal durch eine nur vorübergehende, durch Wiederholung der Impulse zu beseitigende Aenderung des  $TM$ ; dann aber auch als Folge des vergrösserten  $RM$  durch eine bleibende Aenderung.

Dieser zweite Theil des gegenwärtigen Abschnittes wird demnach versuchen festzustellen, ob und in welcher Weise der von einer Kraft inducirte (verschwindende) Magnetismus abhängig ist von dem permanent magnetischen Zustande? Dass eine solche Abhängigkeit bestand, konnte nicht bezweifelt werden, nachdem bereits festgestellt

war, dass *TM* beeinflusst wird durch das *RM*, welches kleinere Kräfte bereits vorher inducirt haben, dass es weiter auch abhängt von dem *RM*, welches gleichzeitig durch die nämliche Kraft inducirt wird. (I. Abschnitt.)

Auch ist es nach den Vorstellungen, die wir von dem Vorgang der Magnetisirung hegen, ganz naturgemäss, dass die inneren Kräfte, mit welchen sich die äussere magnetisirende ins Gleichgewicht setzen muss, sich ändern, sobald von den Molecularmagneten neue Gleichgewichtslagen eingenommen sind. Die nämliche Kraft muss deshalb eine verschieden grosse Drehung der Molecularmagnete veranlassen können, je nach der gegenseitigen Lagerung, in welcher sich dieselben bei beginnender Wirkung der Kraft befinden.

Den experimentellen Nachweis habe ich schon in der 1. Abhandlung zu führen gesucht (a. a. O. p. 420—421), bin jedoch wegen des engen Gebiets der anwendbaren Kräfte damals zu allgemeinen Resultaten nicht gelangt. Jamin glaubt an eine annähernde Unabhängigkeit des von einer Kraft inducirten von dem durch stärkere Kräfte erregten permanenten Magnetismus, Chwolson<sup>1)</sup> hält die Unabhängigkeit für eine vollkommene und das (von ihm sogenannte erste) Gesetz von Jamin als ein bis zu den äussersten Grenzen richtiges, selbst für conträre Magnetisirung, bei welcher die kleinere Kraft dem durch die grössere erregten permanenten Magnetismus entgegenwirkend denselben vermindert.

Die Versuche wurden theils in der Weise angestellt, dass der grössere permanente Magnetismus des Stabs bezüglich der durch ihn verursachten Ablenkung des Magnetometers ganz uncompensirt blieb, theils wurde eine solche Compensation durch Annäherung der Compensationsspirale an das Magnetometer oder durch einen in der 1. oder 2. Hauptlage befindlichen Hilfsmagneten ausgeführt. Diese vier Methoden geben nicht wesentlich verschiedene Resultate.

1) Pogg. Ann. Ergbd. VII. p. 559.

Tabelle 22. Eisenstab  $L = 220$  mm.  $D = 1,98$ .  $A = 7,61$ .  
Ausgeglüht.

$RM_{sc}$	320—341	432	476	488
$TM_1 \}^{sc}$	188,0	185,3	198,9	205,6
$TM \}^{sc}$	163,1	176,0	187,8	192,8
Differenz	24,9	9,3	11,1	12,8
$i_{sc}$	133,3	133,3	132,9	132,9

Tabelle 23. Sehr weicher, gut geglühter Eisenstab.  
 $L = 199$  mm.  $D = 5$ .

$RM_{sc}$	60—67	84	108	134	147
$TM_1 \}^{sc}$	291,6	296,4	305,2	298,9	293,0
$TM \}^{sc}$	282,6	290,2	295,0	285,0	277,4
Differenz	9,0	6,2	10,2	13,9	15,6
$i_{sc}$	84,97	84,7	84,55	84,7	84,53

Darauf Stab erschüttert:  $RM = 40$  27 123  
Steigt durch wiederh. Wirkung von  $i$  auf 100 87 136  
wobei  $TM = 291,3$  288,7 279,3

Tabelle 24. Stahlstab. Es werden die  $TM$  von 4 Kräften  
geprüft. Vertical über jedem  $TM$  steht das  $RM$ , bei  
welchem jenes gefunden ist.

$RM_{sc}$	56—66	107—121	178—198	215—224	259	290
$i_{sc} = 130 \}$						
$TM_{sc} \}$	91,2	90,9	87,2	86,4	86,3	83,8
$i = 216$	$TM$	171,5	167,3	165,8	165,6	162,0
	$i = 358$	$TM$	332,3	—	338,8	340,9
		$i = 461$	$TM$	469,7	—	476,5
$\frac{RM}{i}$	0,508	0,560	0,553	0,486	—	—
$\frac{RM_1}{RM}$	0,850	0,885	0,900	0,960	—	—
$\frac{TM}{i}$	0,702	0,794	0,928	1,019	—	—

Die graphische Darstellung zeigt den Wendepunkt der  $RM$  zwischen der zweiten und dritten Kraft, etwas mehr nach der zweiten hin. Die Curve der  $\frac{RM_1}{RM}$  zeigt entsprechend, dass ihr tiefster Punkt zwischen der 2. und 3. Kraft liegen muss, dass die erste Beobachtung wieder einen aus der Reihe heraustretenden, zu kleinen Werth geliefert hat. (I. Abschnitt.)

Tabelle 25. Eisenstab.  $L=200$ .  $D=2,61$ .  $A=7,65$ .

$RM_{sc}$	178—190	210	240	260
$TM_1$ } $sc$	270,2	331,0	364,4	365,8
$TM$ }	257,1	319,8	350,5	351,1
$i_{sc}$	133,3	133,03	132,9	132,9

Tabelle 26. Derselbe Stab, ausgeglüht.  $E=306,0$ . Die erste Zahl jeder Horizontalreihe gibt mit dem vertical darüber stehenden  $RM$  zusammen das  $TM$  und  $RM$  des Sättigungsimpulses, wenn die betreffende Kraft als die bis dahin grösste auf den Stab einwirkte.

$RM_{sc}$	22	123	180	213	243	260	262
$i_{sc}=31,5$ $TM$	37,0	34,3	33,8	32,3	27,8	27,2	—
$i=72,5$ $TM$	105,0	129,4	136,5	118,5	112,7	111,2	
$i=129,5$ $TM$	249,5	315,3	339,5	334,8	332,0		
$i=214$ $TM$	434,0	465,5	472,7	470,7			
$i=357$ $TM$	567,7	573,5	577,7				
$\frac{RM}{i}$ und $\frac{TM}{i}$	s. in Tab. 11.						

Tabelle 27. Gut geglühter Eisenstab.  $L=199$ .  $D=3,5$ .  $A=7,68$ .  $E=306,0$ .

$RM_{sc}$	14	27	60	96	158	171	204
$i_{sc}=23$ $TM_{sc}$	54,7	54,4	55,0	55,6	53,7	52,0	51,0
$i=31$ $TM$	81,0	83,0	84,4	81,0	79,1	—	
$i=50$ $TM$	153,6	160,6	161,2	155,5	145,3		
$i=72$ $TM$	255,8	281,8	274,0	267,0			
$i=129$ $TM$	552,7	577,0	—				

Der Wendepunkt der  $TM$  ist bei  $i=129$  noch nicht erreicht, der der  $RM$  liegt in der Nähe von  $i=72$ .

Erschüttert:  $RM$  sinkt auf 38.  $i=72$ .  $RM=123$ .  $TM=278,5$ .

" " " " 32. " " = 112. " = 277,7.

" " " " 93. " " = 104. " = 268,0.

Erschüttert,  $i=50$ . " = 112. " = 169,3.

" " " " 21. " " = 70. " = 158,5.

" " " " 80. " " = 127. " = 154,5.

" " " " 7. " " = 72. " = 156,0.

Tabelle 28. Derselbe Eisenstab, ausgeglüht.  $E=358,0$ .

$RM_{sc}$	27,5	50,7	70,9	89,1	110	121	127	131
$i=32,3 TM_{sc}$	61,0	63,1	63,7	60,9	58,5	57,0	—	—
$i=52,3 TM$	119,8	124,2	124,1	115,6	110,2	—	—	—
$i=75,2 TM$	199,1	205,8	204,8	200,5	192,6	191,3	—	—
$i=102,4 TM$	298,7	307,7	308,7	306,2	303,3	—	—	—
$i=146,7 TM$	453,0	461,5	463,8	465,3	—	—	—	—
$i=196,8 TM$	600,6	601,1	604,3	—	—	—	—	—
$\frac{RM}{i}$	= 0,860	0,946	0,947	0,87	0,75	0,61	—	—
$\frac{TM}{i}$	= 1,90	2,30	2,65	2,93	3,10	3,06	—	—

Tabelle 29. Eisenstab.  $L=200$  mm.  $D=3,5$  mm.  $E=358,0$ .

$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$TM_{sc}$	$TM_{sc}$	$TM_{sc}$	$TM_{sc}$	$\frac{RM}{i}$	$\frac{TM}{i}$
23,8	76,2	—	—	—	—	0,613	1,964
41,3	76,0	106,3	—	—	—	0,815	2,097
73,6	76,7	106,4	169,5	—	—	1,019	2,348
98,9	76,0	106,4	170,8	264,0	—	1,007	2,654
119,3	75,1	105,8	174,9	273,4	428,0	0,837	3,003
129,0	—	—	172,2	278,0	435,2	0,670	—
135,0	—	—	169,7	278,5	445,2	0,536	—
142,0	—	—	—	277,8	454,6	0,400	—
143,2	—	99,2	163,0	—	455,5	—	—
$i=38,8$	50,7	72,3	99,6	142,5	—	—	—
bis 38,6	bis 50,2	bis 71,5	bis 98,6	bis 141,7	—	—	—

Der Wendepunkt der  $RM$  liegt (nach der graphischen Darstellung) zwischen  $i=72$  und  $i=99$ , etwas näher der ersteren, der Wendepunkt der  $TM$  ist bei  $i=142$  noch nicht erreicht.



Tabelle 30. Stahlstab.  $L=200$ .  $D=3,5$ .  $E=409,6$ .

$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$TM$	$TM$	$TM$	$TM$	$TM$	$TM$
57,4	68,0	—	—	—	—	—	—
91,0	—	90,6	—	—	—	—	—
127,8	—	—	113,8	—	—	—	—
172,2	—	—	—	147,8	—	—	—
221,4	—	—	—	—	201,4	—	—
241,9	62,1	85,4	108,5	144,1	197,0	230,1	—
261,8	—	—	—	—	—	—	270,9
273,0	56,5	80,1	103,3	140,5	193,7	—	267,3
$i_{sc}$	112,2	142,1	172,4 bis 171,4	217,5	298,0 bis 296,6	362,1	473,5 470,5
$\frac{RM}{i}$	0,512	0,641	0,741	0,794	0,743	0,668	0,572
$\frac{TM}{i}$	0,607	0,641	0,663	0,682	0,675	0,630	0,573

Die beiden Wendepunkte treten bei diesem Stab bei der merklich gleichen Kraft ein.

Die Versuche ergeben folgendes Gesetz:

Wenn eine magnetisirende Kraft auf einen Stab wirkt, der bereits ein magnetisches Moment ( $RM$ ) besitzt, grösser als es diese Kraft selbst erzeugen konnte ( $rm$ ), so ist ihre Inductionsfähigkeit (an verschwindendem Magnetismus) gesteigert, wenn  $RM - rm$  klein, vermindert, wenn diese Differenz gross ist<sup>1)</sup>. Hierdurch wird bedingt, dass kleine Kräfte sowohl eine Zu- als eine Abnahme der Inductionsfähigkeit aufweisen können, grössere Kräfte aber, welche selbst ein bedeutendes, dem Maximum nahe liegendes Moment erregen, gewöhnlich nur die Zunahme zeigen. Zwar berechtigen die vorliegenden Beobachtungen nicht,

1) Es ist das ganz in Uebereinstimmung mit der Folgerung, welche Hr. Herwig aus seinen Versuchen mit eisernen Röhren (Pogg. Ann. CLVI. p. 440) besonders für den Fall, dass die vorausgehenden starken Magnetisirungen circulare waren) gezogen hat.

in aller Strenge anzunehmen, dass der Uebergang des  $TM$  von der Zunahme in die Abnahme unabhängig von der Grösse der Kraft immer dann erfolgt, wenn  $RM$  um einen gewissen, für alle Kräfte gleichen Werth zugenommen hat, aber soviel steht fest, dass, wenn der Stab auf auf dem Maximum des  $RM$  geprüft wird, kleinere Kräfte eine Einbusse an Inductionsfähigkeit, grössere einen Zuwachs zeigen. Es gibt aber dann eine Kraft, deren  $TM$  bei Vergrösserung des  $RM$  anfangs ansteigend, dann fallend, nach eingetretenem Maximum des  $RM$  wieder seinen ersten Werth erreicht. Die angeführten Tabellen machen es mehr als wahrscheinlich, dass dieselbe zugleich diejenige ist, bei welcher  $RM$  seinen Wendepunkt besitzt. Allein Tab. 30 scheint dem zu widersprechen. Hier zeigen auch nach dem Wendepunkt der  $RM$  fallende Kräfte noch eine Abnahme ihres  $TM$ , auch ist bei allen Kräften die Periode der Zunahme offenbar sehr klein.

Meine früher (1. Abh.) ausgesprochene Ansicht wird also durch die neuen Versuche bestätigt, von einer vollkommenen Unabhängigkeit des  $TM$  vom  $RM$ , wie Chwolson meint, kann bei Aenderungen des  $TM$  bis zu 40% des anfänglichen Werthes hin keine Rede sein, selbst eine annäherungsweise Constanz wird man nur in ganz besonderen Fällen annehmen dürfen.

III. Vom Einfluss mit den magnetischen gleichzeitig zur Wirkung kommender mechanischer Kräfte (Erschütterungen) und über einige Analogien zwischen den Gesetzen, welche von mechanischen und magnetischen Kräften befolgt werden.

1. Erschütterung des Stabs bei constantem Strom.

Tabelle 31. Stahlstab.  $L = 150$  mm.  $D = 4,9$ .  $A = 7,83$ .

Ausgeglüht.  $E = 358,0$ . Ein vorgesetztes + bedeutet: erschüttert.

$W = 1,7$ .

$J$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$	$J$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
1.	634,8	234,2	400,6	378,5	3.	626,4	253,9	372,5	379,7
2.	627,2	247,6	379,6	379,1	4.	625,7	256,9	368,8	380,1



$W = 1,7.$									
$J$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$	$J$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
10.	625,4	264,1	361,6	379,8	34.	638,2	272,8	365,4	—
20.	626,4	268,0	358,4	379,6	+35.	658,0	—	—	380,0
30.	627,5	269,6	357,9	379,5	36.	637,7	275,5	362,2	—
+31.	656,8	271,5	385,3	379,8	+37.	651,6	276,1	375,5	—
32.	636,0	273,4	362,6	—	38.	637,7	276,2	361,5	—
+33.	651,1	273,8	377,3	379,8					
$W = 0,8.$									
1.	783,1	288,5	494,6	483,1	+	813,5	—	—	—
2.	784,2	293,5	490,7	483,9	11.	792,8	307,7	485,1	—
10.	788,9	—	—	482,6					

Tabelle 32. 2 Stahlstäbe.  $L=120$ .  $D=5$ , aus dem gleichen Stück geschnitten.  $E=358,0$ . $W = 1.$ 

Stab a.					Stab b.				
$J$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$	$J$	$GM_{sc}$	$RM_{sc}$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
1.	509,0	100,0	409,0	452,9	+ 1.	549,7	102,5	447,2	456,2
2.	504,2	106,3	379,9	—	2.	514,0	104,6	409,4	—
3.	503,9	108,5	395,4	453,8	3.	511,8	105,9	405,9	—
7.	500,3	113,0	387,3	451,8	7.	507,6	108,1	399,5	455,1
11.	499,5	115,0	384,5	451,2	11.	506,5	108,8	397,7	—
18.	501,0	115,3	385,7	451,8					
23.	500,0	116,0	384,0	451,8					
+24.	526,2	116,5	409,7	—					
25.	507,4	—	—	—					
28.	502,0	—	—	—					
31.	500,8	117,3	383,5	—					
+32.	525,2	118,5	406,7	—					
33.	506,5	—	—	—					
38.	503,7	118,0	385,7	—					
$W = 0.$									
+ 1.	721,0	126,5	594,5	—	1.	695,0	115,0	580,0	—
2.	695,5	127,5	568,0	—	2.	695,0	117,1	577,9	—
9.	682,4	130,2	552,2	—	9.	691,5	122,5	569,0	—

Tabelle 33. 2 Stahlstäbe von gleichen Dimensionen, aus dem gleichen Stück.

Stab A.		Stab B.		Stäbe ausgeglüht.	
$rm = 34,2.$		$rm = 28,9.$		Stab A.	Stab B.
$+RM_1 = 454,5.$		$RM_1 = 431,1.$		$rm = 7,1.$	$rm = 17,2.$
$RM_2 = 472,4.$		$RM_2 = 454,8.$		$RM_1 = 447,4.$	$+RM_1 = 471,2.$
$RM = 504,5.$		$RM = 502,1.$		$RM_2 = 475,0.$	$RM_2 = 491,8.$
				$RM_3 = 484,3.$	$RM_3 = 499,6.$
				$RM = 516,7.$	$RM = 518,3.$

Bei der zweiten Beobachtungsreihe (nach dem Ausglühen) war der Strom etwas stärker.

Hieraus ist zu folgern:

Eine Erschütterung des Stabs während der Dauer der magnetisirenden Kraft wirkt sowohl auf *GM*, wie auf *RM*, aber, weil auf *GM* mehr als auf *RM*, auch auf *TM* vergrössernd ein. Der Zuwachs, welchen *TM* durch die Erschütterung erleidet, hängt nicht von der Ordnungszahl des Impulses, bei welchem dieselbe erfolgt, ab, er bleibt sich gleich, mag nun beim ersten Impuls oder bei dem Sättigungsimpuls erschüttert werden. (Tab. 32.  $W=1$ .) Auch ist der Zuwachs des *TM* kein bleibender, sondern wenn man einige Impulse ohne Erschütterung folgen lässt, so nimmt schliesslich *TM* wieder den früheren kleineren Werth an. Die Erschütterung wirkt also wie eine grössere Kraft, indem sie eine Art von Nachwirkung erzeugt, die mit der früher (II, 1) beschriebenen wahrscheinlich zu identificiren ist. Demnach wäre ein Impuls der Kraft *p*, mit Erschütterung ausgeführt, einem Impuls einer grösseren Kraft *P* gleich zu setzen, eine Vorstellung, welche schon dadurch berechtigt ist, dass ein solcher ein grösseres Moment gibt.

Dieselbe Vorstellung erklärt auch vollständig das Verhalten von *RM* bei Erschütterungen. Man kann, wie ich in der 1. Abh. p. 415 Z. 23 flg. und wie auch Bouty schon bemerkte, immer eine grössere Kraft *P* finden, welche das von einer anderen (kleineren) *p* erst durch eine sehr grosse Zahl von Impulsen erregte (Sättigungs-) Moment *RM* durch einen einzigen Impuls erzeugt<sup>1)</sup>, oder eine andere,

---

1) Hr. Bouty findet, dass der Quotient zweier solcher Kräfte, *p* und *P*, wie sie aus der graphischen Darstellung leicht erhalten werden, für die ganze Ausdehnung der Curven constant ist. (C. R. 1875. Nr. 13.) Ich kann mich damit nicht einverstanden erklären, nach meinen Versuchen nimmt  $\frac{P}{p}$  mit wachsender Kraft zu, bleibt einige Zeit constant und nimmt dann wieder ab.

welche das von der kleineren durch zwei Impulse erregte bereits durch einen einzigen gibt u. s. f. Das letztere z. B. stellt Tab. 33 fast genau dar. Niemals habe ich durch Vornahme eines einzigen, von starken Erschütterungen begleiteten Impulses sofort das *RM* erhalten, welches durch alleinige Wiederholung der Impulse ohne Erschütterung zu erreichen war. War der erste Impuls mit Erschütterung ausgeführt, so machte sich der Einfluss derselben auch bei den späteren, von Erschütterungen nicht begleiteten, noch dadurch bemerkbar, dass *GM*, *RM* und *TM* grösser sind, als wenn die Erschütterung ganz unterblieben wäre. Erst nach einer grösseren Zahl von Impulsen kommen die beiden Reihen *A* und *B* (Tab. 33), *a* und *b* (Tab. 32) in Uebereinstimmung (von einer constanten Differenz abgesehen).

Wenn also die Erschütterung bei dem ersten (oder bei einem der ersten) Impulse angewendet wird, so ist auch ihre Wirkung auf *RM* als eine vorübergehende zu bezeichnen; denn was *RM* durch Vornahme der Erschütterung vorausgeëilt ist, geht durch langsames Anwachsen bei den folgenden Impulsen wieder verloren.

Erschüttert man dagegen den Stab nach Eintritt des Sättigungsmomentes *RM*, so wächst nun durch die Erschütterung *RM* noch weiter. (Tab. 31  $W=1,7$  und in auffallender Weise noch andere, vorstehend nicht mitgetheilte)<sup>1)</sup>. Ich halte das für vollkommen erklärlich, denn in Tab. 31 z. B. nimmt beim 31., 33., 35., 37. Impuls *TM* Werthe an, wie es sie ungefähr beim 2. Impuls besass, bei allen folgenden war *TM* kleiner. In Tab. 32a erreicht *TM* beim 24. und 32. Impuls wieder die Grösse von *TM*<sub>1</sub>. Die Aufnahme oder Bildung des remanenten Momentes geschieht aber nicht durch eine oft wiederholte gleich grosse Entfernung der Theilchen aus ihren augenblicklichen

1) Frankenheim's Behauptung (Pogg. Ann. CXXIII p. 67 und 68), dass ein gesättigter Stab sein *RM* durch Erschütterung nicht weiter vergrössert, wird also hierdurch widerlegt.

Gleichgewichtslagen, also im Grunde auch nicht durch eine constante, sondern durch eine successive abnehmende Kraft. Wird also nach eingetretener Sättigung mit  $RM$  die Entfernung von der Gleichgewichtslage wieder ebenso gross oder grösser als beim 1. oder 2. Impuls, so muss auch  $RM$  noch weiter wachsen.

2. Verlauf von  $GM$  und Wirkung einer Erschütterung bei inconstantem, continuirlich abnehmendem Strom.

Einen Strom von continuirlich abnehmender Intensität lieferten Bunsen'sche, mit sehr schwacher Salpetersäure ( $\Delta = 1,17$ ) gefüllte Elemente. Die Stäbe wurden zuerst durch einen sehr starken Strom magnetisirt, so dass bei den inconstanten Strömen  $RM$  unverändert blieb. Der Werth desselben bei den folgend mitgetheilten Beobachtungsreihen ist ca.  $RM = 220^{\circ}$ . Die Ablenkungen der Tangentenbussole  $i_{sc}$  sind während der ersten oder der beiden ersten Minuten nach Stromschluss aus den Umkehrpunkten der Schwingungen berechnet; zwischen zwei unmittelbar unter einander stehenden  $i$  liegt eine Zeit von ca.  $6''$ . Der Strom bleibt während einer Beobachtungsreihe fortwährend geschlossen.

Tabelle 34. Stahlstab.

a. Stab in der Spirale befestigt, darauf erst der Strom geschlossen.

$I$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
1.		467
		442
		433
		427
	454	
	421	375
	418	370
2.	307	368
3.	300	366

b. Strom geschlossen, dann der Stab in die Spirale eingeschoben.

$I$	$TM_{sc}$	$i_{sc}$
1.		429
		427
		418
	361	374
	356	367
2.	302	365.

Tabelle 35. Stahlstab.

a. Stab in der Spirale befestigt, dann erst der Strom geschlossen.			b. Strom geschlossen, dann der Stab in der Spirale befestigt.			c. wie bei a.		
<i>I</i>	<i>TM<sub>sc</sub></i>	<i>i<sub>sc</sub></i>	<i>I</i>	<i>TM<sub>sc</sub></i>	<i>i<sub>sc</sub></i>	<i>I</i>	<i>TM<sub>sc</sub></i>	<i>i<sub>sc</sub></i>
1.		429	1.			1.		431
		425			418			424
		416			411			411
		409			392			400
					376			
	424	374		347	372			376
	423	373		345	369		413	371
	+413	370		+344	368		+395	369
	+387	369		+345	368		+396	369.
			2.	307	367			

Tabelle 36. Stahlstab. Strom geschlossen, dann der Stab  
in die Spirale eingeschoben.

a.			b.		
<i>I</i>	<i>TM<sub>sc</sub></i>	<i>i<sub>sc</sub></i>	<i>I</i>	<i>TM<sub>sc</sub></i>	<i>i<sub>sc</sub></i>
1.		264	1.		258
		247			246
		236			234
		230			227
	244	221		241	208
	238	211		227	184
	+230	208		221	173
	+228	204		217	172
2.	167	198		+213	173
3.	—	—		+213	173
4.	145	174	2.	—	—
	+152	174	3.	—	—
5.	—	—	4.	140	173
6.	—	—		+153	173.
7.	137	174			
	+146	174			

Wenn die magnetisierende Kraft continuirlich, ohne Sprung abnimmt, so wird gleichzeitig auch *TM* kleiner, aber in bei weitem geringerem Verhältniss. Denn sobald man, nachdem die Kraft sehr nahezu constant geworden



ist, den Stab aus der Spirale entfernt und wieder einschiebt, gibt dieser 2. Impuls ein um 27% resp. 15% kleineres  $TM$  (Tab. 34). Wiederholt man die Impulse, so nimmt auch dann noch  $TM$  ein wenig ab. Dieser Theil der Abnahme fällt aber unter II. 1, er ist Nachwirkung in dem dort definirten Sinne. Dass im einen Falle eine Abnahme von 27%, im zweiten nur eine solche von 15% eintrat, hat darin seinen Grund, dass in Tab. 34a der Stab anfangs grösseren Kräften als in b unterworfen war.<sup>1)</sup> Während, wenn bei von Anfang an constantem Strom der Stab erschüttert wird,  $TM$  wächst, nimmt es in Tab. 35a und c ab und bleibt in Tab. 35b merklich constant. Mit einem Strom, dessen Intensität anfangs stark abnimmt und erst nach geraumer Zeit, wenn die Polarisation in den Elementen ihr Maximum erreicht hat, einen constanten Werth annimmt, kann man an dem nämlichen Stabe die Zunahme, Constanz und Abnahme des  $TM$  bei hinzutretender Erschütterung erhalten, indem man nur nach Schluss des Stromes mehr oder weniger lange mit dem Einschieben des Stabes in die Spirale wartet. Bei dem obigen Stabe war es, um eine augenfällige Abnahme zu bekommen, nöthig, dass derselbe schon im Augenblicke des Stromschlusses sich in der Spirale befand.

Verhält sich (Tab. 35b)  $TM$  gegen Erschütterungen indifferent, so könnte man muthmassen, dass es bereits gerade den Werth besitzt, den es bei von Anfang an constantem Strome ( $i = 368$ ) annehmen würde, sobald erschüttert wird. Tab. 36 zeigt aber, dass es auch dann immer noch bedeutend grösser ist, als das Erschütterungs- $TM$  bei constantem Strome, und dass es, nachdem einmal

1) Dass es nicht die Methode war, welche die verschiedene Grösse des Moments (418 und 356) in den beiden Beobachtungsreihen hervorrief, trotz der fast gleichen Stromstärke, habe ich durch besondere, hier nicht weiter zu besprechende, Versuche bewiesen. Bei diesem Stabe war es gleichgültig für die Grösse des inducirten Magnetismus, ob man ihn schon vor Stromschluss in der Spirale befestigte oder ihn erst nachdem einschob.



*TM* durch Wiederholung der Impulse auf einen kleinsten Werth herabgesunken, auch den kräftigsten Erschütterungen nicht gelingt, es auch nur annähernd auf den früheren Werth wieder zu erheben<sup>1)</sup>).

Diese Erscheinungen liessen sich aus der bekannten Thatsache der Zunahme des *TM* bei constantem Strome a priori ableiten. Sie bilden die nothwendige Ergänzung derselben und dürften für unsere theoretischen Anschauungen vom Vorgang der Magnetisirung von nicht geringer Wichtigkeit sein, weil sie das Vorhandensein einer bei der Drehung der Molecularmagnete auftretenden Art von Reibungswiderstand auf die denkbar einfachste und klarste Weise darthun.

### 3. Analogien zwischen den Gesetzen mechanischer und magnetischer Kräfte.

Die beschriebene allmähliche Steigerung des *RM* ist, wie schon Frankenheim hervorgehoben hat und wie auch ich bestätigt gefunden habe (ebenso wie die allmähliche Abnahme des *TM*, die gleichzeitig mit der Zunahme des *RM* erfolgt), nur und allein durch die Wiederholung der Impulse, nicht aber durch die grössere Zeitdauer derselben bedingt, so dass man hier keine der elastischen Nachwirkung verwandte Erscheinung vor sich hat. Dass auch die Erscheinung, welche ich als magnetische Nachwirkung bezeichnet habe, mit der elastischen nichts gemeinsam hat, geht aus den Gesetzen, welche jene befolgt, aus ihrer ganzen Natur ohne Weiteres hervor. Die schon von F. Kohlrausch<sup>2)</sup> einmal gestellte Aussicht, Gesetze der elastischen Nachwirkung auf magnetische Erscheinungen

1) Diese Versuche können zu dem Einwande Veranlassung geben, dass auch die häufig beobachtete (s. Tab. 1) starke Abnahme des *GM* vom 1. zum 2. Impuls durch eine nicht ganz zu vernachlässigende anfängliche Inconstanz des Stromes herbeigeführt sei. Dieselbe zeigt sich jedoch auch dann noch, wenn man mit dem Einschieben des Stabes in die Spirale wartet, bis die Stromintensität vollkommen constant geworden ist.

2) Pogg. Ann. CXIX.

anwenden zu können, wird uns vorläufig noch nicht näher rücken.

Dagegen ist es erlaubt, Gesetze der permanenten Gestaltsänderungen elastischer Körper ohne Weiteres auf magnetisches Gebiet zu übertragen, wie Hr. G. Wiedemann in seinen bekannten Untersuchungen zuerst mit dem grössten Erfolge gethan hat. Man vergleiche z. B. die Tab. 1 in Thalén's Arbeit<sup>1)</sup>: Ueber die Bestimmung der Elasticitätsgrenze bei Metallen. Es wirkt dort die streckende Kraft 815 8mal hintereinander. Jede folgende Wirkung gibt noch einen kleinen Zuwachs an bleibender Verlängerung, durch die 8malige ist bei weitem noch nicht das Maximum, welches 815 geben kann, erreicht. Darauf folgende kleinere Kräfte bringen deshalb schon von 700 an wieder neue Aenderungen hervor, was nicht der Fall wäre, wenn man 815 mit einer sehr grossen Zahl von Impulsen angewandt hätte. Aehnlich, weiter unten in Tab. 1, wo nach 1 maliger Wirkung von 913 neue bleibende Verlängerungen schon von 700—750 an sich wieder zeigen.

Die Elasticitätsgrenze eines Materials ist eine durchaus variable, von seiner vorherigen Behandlung abhängige Grösse und bestimmt durch die grösste Kraft, welche bis zu der gegebenen Zeit auf den Körper gewirkt hat, sowie ferner durch die Zahl ihrer Impulse.

Gleichlautende Gesetze habe ich für magnetische Kräfte und permanenten Magnetismus schon in der 1. Abhandlung (§ 9) aufgestellt.

Die Vermuthung Thaléns<sup>2)</sup>, dass die Grösse der durch Wiederholung der Impulse erreichbaren Verlängerung im Verhältniss zu der durch den ersten Impuls erzeugten von der Grösse der Kraft abhängig sei, haben mir einige Versuche bestätigt; ob die Abhängigkeit eine ähnliche ist, wie ich sie für  $\frac{RM_1}{RM}$  ... (I. Abschnitt) gefunden habe, vermag ich bis dahin sicher noch nicht zu entscheiden.

1) Pogg. Ann. CXXIV.

2) a. a. O. p. 612 und 613.

Der Einfluss des durch vorhergegangene kleinere Kräfte erzeugten *RM* auf das durch nachfolgende grössere erregte (I. Abschnitt) findet sich nach Thalèn (s. dessen Curven) ganz analog auch bei den durch mechanische Kräfte erzeugten permanenten Deformationen elastischer Körper wieder.

Wohl noch manche an die vorliegenden Resultate anknüpfende Frage dürfte einer Lösung werth sein. Doch habe ich manches um deswillen unerwähnt oder unausgeführt gelassen, weil ich es in der dritten Abhandlung genauer besprechen möchte.

Göttingen, im März 1878.

## VI. Ueber die Resonanz in Hohlräumen; von Theodor Wand,

Consistorialrath in Speyer.

Durch die Vorlesungen über mathematische Physik von Hrn. G. Kirchhoff (24. Vorlesung p. 323 u. flg.) auf die interessante Arbeit des Hrn. Helmholtz in Crelle's Journ. LVII über die Theorie der Luftschwingungen in offenen Röhren aufmerksam gemacht, habe ich gefunden, dass diese Arbeit noch eine ganz ausgiebige Nachlese sowohl mit Rücksicht auf die angewendeten Methoden, als mit Rücksicht auf die zu erreichenden Resultate übrig gelassen hat.

Das Ergebniss einer solchen Nachlese erlaube ich mir den Lesern dieser Zeitschrift auf den folgenden Blättern darzubieten. Ich habe insbesondere folgende Sätze gefunden:

1. Hohlräume mit einer Oeffnung, welche angeblasen den gleichen Ton geben, lassen diesen Ton, wenn er von aussen erregt wird, in gleicher Stärke wiederklingen,

welches auch die Gestalt dieser Hohlräume und ihrer Oeffnungen sein mag. (§ 3 am Ende.)

2. Die beiden tiefsten Töne, welche eine cylindrische Pfeife gibt, wenn sie nur an einem Ende oder an beiden Enden offen ist, liegen weniger als eine Octave auseinander und das Intervall dieser beiden Töne ist um so kleiner, je grösser der Durchmesser der Pfeife im Verhältniss zur Länge ist. (§ 8.)

3. Sogenannte cubische Pfeifen mit einem cylindrischen Ansatz geben einen Ton, dessen Höhe durch eine transcendente Gleichung (§. 7 [4]) bestimmt wird. Specialfälle sind:

Wenn die Länge  $l$  des cylindrischen Ansatzes gleich Null ist; alsdann ist, wenn  $N$  die Schwingungszahl des Tones,  $C$  eine Constante,  $R$  den Radius des cylindrischen Ansatzes und  $V$  das Volumen des bauchigen Raumes bedeutet:

$$N = C \sqrt{\frac{2R}{V}}.$$

Wenn die Länge des Halses gross ist gegen den Radius, aber der Raum des cylindrischen Ansatzes nur ein Bruchtheil des bauchigen Hohlraumes; alsdann ist:

$$N = C \sqrt{\frac{\pi R^2}{Vl}}.$$

Beide Formeln hat schon H. Sondhauss durch Versuche gefunden (Pogg. Ann. LIX und LXXXI). Der theoretische Nachweis der ersten Formel wurde durch Hrn. Helmholtz in dem oben erwähnten Aufsatz gegeben.

4. Hat eine cubische Pfeife zwei Löcher  $a$  und  $b$  und lässt das erste Loch  $a$  für sich allein einen Ton hören, dessen Schwingungszahl  $N_a$  ist, das zweite Loch  $b$  für sich allein einen Ton, dessen Schwingungszahl  $N_b$  ist, so lässt diese Pfeife, wenn man beide Löcher zugleich offen lässt, einen Ton hören, dessen Schwingungszahl gleich  $\sqrt{N_a^2 + N_b^2}$  ist. Auch diesen Satz fand bereits Hr. Sondhauss durch Versuche bestätigt.

Ich schreite nunmehr zur analytischen Entwicklung der hier angedeuteten Resultate.

§ 1. Entwicklung der allgemeinen Differentialgleichungen.

Nach dem Princip der Erhaltung der Kraft ist stets dieselbe Arbeit erforderlich, um ein System von materiellen Punkten aus einer Configuration in eine bestimmte andere Configuration zu bringen, welchen Weg man auch die einzelnen Punkte einschlagen lässt, um sie aus der ersten Configuration in die zweite zu bringen. Die Arbeit, welche man braucht, um ein System aus einer ursprünglichen Configuration (z. B. der Configuration des Gleichgewichtes) in eine gegebene andere Configuration zu bringen, hängt daher nur von der relativen Lage der Theilchen in dieser zweiten Configuration ab; man nennt diese Arbeit die potentielle Energie des Systems.

Ueberlässt man ein System, welches irgendwie aus seinem Gleichgewicht gebracht ist, sich selbst, so entwickelt sich lebendige Kraft auf Kosten der potentiellen Energie.

Füllt ein Massensystem einen Raum stetig aus und wirken an der Oberfläche dieses Raumes Widerstände, so ist zum Ueberwinden dieser Widerstände Arbeit erforderlich und diese Arbeit wird gleichfalls auf Kosten der potentiellen Energie und lebendigen Kraft geleistet. Bezeichnet man die lebendige Kraft mit  $T$ , die potentielle Energie mit  $E$  und die äussere Arbeit mit  $A$ , so hat man als allgemeinen analytischen Ausdruck für das Princip der Erhaltung der Kraft:

$$(I) \quad \frac{d}{dt}(T + E + A) = 0.$$

Fügt man zu dieser physikalischen Hypothese die weitere, (II) dass die Componenten der Beschleunigungen der einzelnen Massenpunkte des Systems nur von der jedesmaligen Configuration abhängen, so kann man die Bewegungen der einzelnen Punkte des Systems vollständig bestimmen.

Gegenwärtig handelt es sich nur um die Bewegungen der luftförmigen Körper.

Sind die Verschiebungen eines Lufttheilchens (die immer nur sehr klein gedacht werden)  $u, v, w$  Functionen der Coordinaten  $x, y, z$ , so ist, wenn man mit  $V_0$  das Volumen einer gewissen Luftmenge im Gleichgewichtszustande, mit  $V$  dieses Volumen im Zustande der Bewegung bezeichnet:  $V:V_0 = 1 + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 1 + \vartheta$ , wie als bekannt voraus gesetzt wird; ferner ist, wie gleichfalls hier nicht näher nachgewiesen werden soll, der Druck  $p$  gleich:

$$p = P \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma,$$

und bedeutet hierbei  $\gamma$  das Verhältniss der Wärmecapacität der Luft bei constantem Druck zur Wärmecapacität bei constantem Volumen und  $P$  den Druck im Zustande des Gleichgewichts. Man hat daher:

$$(1) \quad p = P(1 - \gamma)\vartheta.$$

Der Zuwachs an Arbeit, welche erforderlich ist, um die Volumeneinheit um  $d\vartheta$  zu verkleinern (um  $-d\vartheta$  zu vergrössern) ist  $-pd\vartheta$ , also der Zuwachs an potentieller Energie:

$$\frac{dE}{dt} = - \int p \frac{d\vartheta}{dt} d\tau,$$

wobei das Integral sich über das ganze Volumen erstreckt. Ebenso ist:

$$\frac{dA}{dt} = \int p_0 \left( \frac{du_0}{dt} \cos(vx) + \frac{dv_0}{dt} \cos(vy) + \frac{dw_0}{dt} \cos(vz) \right) d\tau.$$

Hier erstreckt sich die Integration über die ganze Oberfläche und  $(vx), (vy), (vz)$  bedeuten die Winkel, welche die Normale der Oberfläche mit den drei Coordinatenachsen macht.

Bezeichnet man weiter das spezifische Gewicht der Luft mit  $\mu$ , so hat man endlich:

$$\frac{dT}{dt} = \int \mu \left( \frac{d^2u}{dt^2} \frac{du}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2} \frac{dv}{dt} + \frac{d^2w}{dt^2} \frac{dw}{dt} \right) d\tau.$$

Durch partielle Integration findet man leicht:

$$-\int p \frac{d\vartheta}{dt} d\tau = -\int p_0 \left( \frac{du_0}{dt} \cos(vx) + \frac{dv_0}{dt} \cos(vy) + \frac{dw_0}{dt} \cos(vz) \right) d\sigma \\ + \int \left( \frac{du}{dt} \frac{dp}{dx} + \frac{dv}{dt} \frac{dp}{dy} + \frac{dw}{dt} \frac{dp}{dz} \right) d\tau.$$

Wendet man nun den Satz I an, so erhält man:

$$(2) \int \left[ \frac{du}{dt} \left( \mu \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{dp}{dx} \right) + \frac{dv}{dt} \left( \mu \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dp}{dy} \right) + \frac{dw}{dt} \left( \mu \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{dp}{dz} \right) \right] d\tau = 0.$$

Der Satz II giebt nun weiter die Bewegungsgleichungen:

$$(3) \mu \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{dp}{dx} = 0, \quad \mu \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dp}{dy} = 0, \quad \mu \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{dp}{dz} = 0.$$

Wäre dies nicht der Fall, sondern wären die rechten Seiten dieser drei Gleichungen  $f, g, h$ , so würden nach dem Satze II  $f, g, h$  nur von der relativen Lage der Massentheilchen abhängen; man könnte also auch setzen, da ja der Satz I für jede beliebige Geschwindigkeit der einzelnen Theilchen gelten soll:

$$\frac{du}{dt} = f, \quad \frac{dv}{dt} = g, \quad \frac{dw}{dt} = h,$$

und die Gleichung (2) würde geben:

$$\int (f^2 + g^2 + h^2) d\tau = 0,$$

eine Gleichung, die nur bestehen kann, wenn  $f=g=h=0$  ist. Substituirt man nun  $p$  aus Gleichung (1), so werden die Gleichungen (3):

$$(4) \mu \frac{d^2 u}{dt^2} = P\gamma \frac{d\vartheta}{dx}, \quad \mu \frac{d^2 v}{dt^2} = P\gamma \frac{d\vartheta}{dy}, \quad \mu \frac{d^2 w}{dt^2} = P\gamma \frac{d\vartheta}{dz}.$$

Diese Differentialgleichungen stellen also die Bewegungen der Luft dar.

## §. 2. Besonderer Fall der Schallbewegungen.

Besteht die Bewegung der Luft in einer einfachen Oscillation ihrer Theilchen, so hat man:

$$u = f' \cos nt + f'' \sin nt, \quad v = g' \cos nt + g'' \sin nt, \\ w = h' \cos nt + h'' \sin nt, \quad \vartheta = \vartheta' \cos nt + \vartheta'' \sin nt.$$



Aus den Gleichungen (4) am Schlusse des vorigen Paragraphen findet man nun leicht, wenn man mit  $\varphi$  eine neue noch zu bestimmende Function  $\varphi = \varphi' \cos nt + \varphi'' \sin nt$  bezeichnet:

$$f' = \frac{d\varphi'}{dx}, \quad g' = \frac{d\varphi'}{dy}, \quad h' = \frac{d\varphi'}{dz},$$

$$\vartheta' = \frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2} + \frac{d^2\varphi'}{dz^2} = \Delta^2 \varphi',$$

und die drei Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen reduciren sich auf die eine Gleichung:

$$\mu n^2 \varphi + P\gamma \Delta^2 \varphi = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\mu n^2}{P\gamma} = x^2,$$

so hat man kürzer:

$$(1) \quad \Delta^2 \varphi + x^2 \varphi = 0$$

als Differentialgleichung, welche die Oscillationsbewegungen der Luft bestimmt. Der Druck ist nach Gleichung (1) §. 1 gleich  $P(1 - \gamma \vartheta) = P(1 - \gamma \Delta^2 \varphi)$ . Mit Hülfe der so eben aufgestellten Gleichung hat man auch:

$$(2) \quad p = P(1 + \gamma x^2 \varphi).$$

Die Function  $\varphi$  stellt also den Ueberschuss des Druckes über den im Gleichgewicht stattfindenden Druck dar multiplicirt mit einer Constanten. Aus Gleichung (1) folgt ferner mit Hülfe der aus der Ableitung der Green'schen Sätze bekannten Integrationsmethode:

$$(3) \quad \int \frac{d\varphi}{dv} do + x^2 \int \varphi dv = 0.$$

Nach dem Princip der Erhaltung der Kraft, welches der Gleichung (1) zu Grunde liegt, kann aus einer geschlossenen Oberfläche, innerhalb deren nicht beständig Arbeit erzeugt wird, auch nicht beständig Arbeit ausströmen. Nun ist die Zunahme der Arbeit, welche aus einer geschlossenen Oberfläche ausströmt, gleich:

$$\int p \frac{d^2\varphi}{dv dt} do = P \frac{d}{dt} \int \frac{d\varphi}{dv} do + P\gamma x^2 \int \varphi \frac{d^2\varphi}{dv dt} do;$$



und wenn man  $q = q' \cos nt + q'' \sin nt$  setzt, erhält man:

$$\frac{dA}{dt} = nP\gamma \int \left( -\frac{dq'}{dv} \sin nt + \frac{dq''}{dv} \cos nt \right) do \\ + nP\gamma x^2 \int \left( q' \cos nt + q'' \sin nt \right) \left( -\frac{dq'}{dv} \sin nt + \frac{dq''}{dv} \cos nt \right) do.$$

Da nun wie gesagt, nicht beständig Arbeit aus der Oberfläche  $O$  ausströmen kann, ist der nicht periodische Theil dieses Ausdrucks gleich Null. Man hat also:

$$(4) \quad \int \left( q' \frac{dq''}{dv} - q'' \frac{dq'}{dv} \right) do = 0.$$

Die bekannte Gleichung (4) stellt also für Wellenbewegungen in analytischer Form das Princip der Erhaltung der Kraft dar.

Eine einfache Auflösung der Gleichung (1) ist:

$$(5) \quad q = \frac{\cos(xr - nt + c)}{r} \text{ oder } q = \frac{\cos(xr + nt + c)}{r},$$

wobei  $r$  die Entfernung zweier Punkte 1 und 2 und  $c$  eine beliebige Constante bedeutet. Diese Auflösung gilt jedoch nur so lange  $r$  nicht gleich Null wird. Der erste Ausdruck bedeutet eine Welle, die vom Centrum sich ins unendliche verbreitet, der zweite Ausdruck eine Welle, die sich aus unendlicher Entfernung gegen das Centrum bewegt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist in beiden Fällen  $n:x$ . Berechnet man nach der Gleichung:

$$\frac{dA}{dt} = P \frac{d}{dt} \int \frac{dq}{dv} do + P\gamma x^2 \int q \frac{d^2 q}{dv dt} do$$

die mittlere Arbeit, welche der erste Ausdruck der Gleichung (5) in der Zeiteinheit durch eine beliebige, das Centrum der Welle umschliesende Oberfläche aussendet, so findet man leicht:

$$- \frac{nP\gamma x^3}{2} \int \frac{\cos(rv)}{r^2} do.$$

Hierbei bedeutet  $(rv)$  den Winkel, welchen die nach aussen gerichtete Normale und die von der Oberfläche nach dem Centrum gerichtete Linie  $r$  mit einander bilden. Ferner ist, wie man leicht einsieht:

$$-\frac{\cos(rv)}{r^2} d\omega = d\omega,$$

wenn man unter  $d\omega$  das Flächendifferential einer Kugel versteht, welche mit dem Radius Eins um das Centrum der Linie  $r$  beschrieben ist. Die von der Bewegung:

$$\varphi = \frac{\cos(xr - nt + c)}{r},$$

in der Zeiteinheit in den unendlichen Raum ausgestrahlte Arbeit ist also:  $2\pi n P \gamma x^3$ . Bei der Bewegung:

$$\varphi = \frac{\cos(xr + nt + c)}{r}$$

findet umgekehrt eine Bewegung von Arbeit aus unendlicher Entfernung gegen das Centrum statt. In der Natur kommen im unendlichen Raume nur solche Wellen vor, welche Arbeit von einem Centrum ins unendliche tragen.

Sowie nun die Function  $1:r$  gleichsam die Grundzelle ist, aus welcher die mannigfaltigen in der Natur vorkommenden Potentialfunctionen sich aufbauen, so ist in gleicher Weise die Function  $\cos(xr - nt + c):r$  die Urzelle, aus welcher sich durch Integration die wirklichen in der Natur vorkommenden Wellenfunctionen für den unendlichen Raum herstellen lassen.

Nun ist weiter klar, dass nur eine einzige Art der Bewegungen im unendlichen Raume entstehen kann, wenn eine geschlossene Oberfläche irgendwie in eine oscillirende Bewegung versetzt wird; denn wenn aus einer und derselben Bewegung einer geschlossenen Oberfläche zwei Wellenfunctionen  $\varphi$  und  $\psi$  entstehen könnten, so müsste auch die Wellenfunction  $\varphi - \psi$  aus Nichts entstehen und ewig fort dauern können, ohne dass irgendwo eine erzeugende Bewegung stattfände.

Setzt man daher:

$$\varphi = \int \gamma \frac{\cos(xr - nt)}{r} d\omega + \int \sigma \frac{\sin(xr - nt)}{r} d\omega$$

und bestimmt man hieraus  $\frac{d\varphi}{dv}$ , so kann man wenigstens das umgekehrte Problem lösen, die Bewegung einer be-

liebigen Fläche zu bestimmen, wenn diese Bewegung eine gewisse gegebene Wellenbewegung erzeugen soll. Ist die Fläche eine Ebene, so findet man leicht:

$$\frac{d\varphi}{dv} = -2\pi\gamma \cos nt + 2\pi\sigma \sin nt.$$

Wenn daher dieser Ausdruck die Bewegung einer Ebene in der Richtung ihrer Normale darstellt, so ist die daraus entstehende Wellenfunction:

$$(6) \varphi = \cos nt \int (\gamma \frac{\cos \kappa r + \sigma \sin \kappa r}{r} do + \sin nt \int (\gamma \frac{\sin \kappa r - \sigma \cos \kappa r}{r} do.$$

Setzt man in Gleichung (4)  $\varphi' = \cos \kappa r : r$ ,  $\varphi'' = \psi$ , so hat man, wenn man über den von einer Oberfläche  $O$  eingeschlossenen Raum mit Ausnahme einer unendlich kleinen Kugel integrirt, welche um den einen festen Endpunkt 1 der Linie  $r$  als Centrum beschrieben ist:

$$(7) \quad 4\pi\psi_1 + \int \left[ \psi \frac{d}{dv} \left( \frac{\cos \kappa r}{r} \right) - \frac{\cos \kappa r}{r} \frac{d\psi}{dv} \right] do_2 = 0.$$

Durch den Index 2 bei  $do$  wird angedeutet, dass nur der zweite Endpunkt von  $r$  bei der Integration als veränderlich angesehen werden darf. Die Gleichung (7) entsteht auch durch Integration der Gleichung:

$$\int \left( \psi \Delta^2 \frac{\cos \kappa r}{r} - \frac{\cos \kappa r}{r} \Delta^2 \psi \right) d\tau = 0$$

unter der Voraussetzung, dass die Function  $\psi$  und ihre ersten Differentialcoefficienten innerhalb des Integrationsraumes stetig sind. Ist daher eine Function  $\psi$ , welche die Bedingung  $\Delta^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0$  erfüllt, innerhalb eines gewissen Raumes stetig nebst ihren drei ersten Differentialcoefficienten, so erfüllt sie die Gleichung (7) und ist in Folge davon mit allen ihren Differentialcoefficienten stetig innerhalb dieses Raumes.

Lässt man zwei Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  an einer Trennungsfläche zusammenstossen, so dass die Function  $\varphi$  nur auf der einen Seite und die Function  $\psi$  nur auf der anderen Seite dieser Trennungsfläche Gültigkeit hat, und sind beide Functionen, sowie ihre nach der Richtung der

Normale dieser Fläche genommenen Differentialcoëfficienten einander gleich, so ist auch für beide Functionen auf dieser ganzen Fläche:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\psi}{dz}.$$

Denn wenn man in einem beliebigen Punkte der Trennungsfläche drei auf einander senkrechte Richtungen  $\lambda, \mu, \nu$  sich denkt, von denen die eine auf der Fläche senkrecht steht, die beiden anderen aber in der Fläche liegen, so ist auf der ganzen Fläche:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\psi}{d\lambda}, \quad \frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{d\psi}{d\mu},$$

weil ja beide Functionen auf der ganzen Trennungsfläche identisch sind; ferner hat man:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{d\varphi}{d\lambda} \cos(\lambda x) + \frac{d\varphi}{d\mu} \cos(\mu x) + \frac{d\varphi}{d\nu} \cos(\nu x), \\ \frac{d\psi}{dx} &= \frac{d\psi}{d\lambda} \cos(\lambda x) + \frac{d\psi}{d\mu} \cos(\mu x) + \frac{d\psi}{d\nu} \cos(\nu x). \end{aligned}$$

Ist nun auch noch  $\frac{d\varphi}{d\nu}$  auf der ganzen Trennungsfläche gleich  $\frac{d\psi}{d\nu}$ , so sind auch alle übrigen Differentialcoëfficienten auf dieser Trennungsfläche gleich. Denkt man sich nun die Trennungsfläche weg, so vereinigen sich die beiden Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  zu einer einzigen Function  $\chi$ , die so beschaffen ist, dass sie selbst und ihre ersten Differentialcoëfficienten überall stetig sind. Diese Function  $\chi$  erfüllt daher die Gleichung (7) und ist überall, auch durch die Trennungsfläche hindurch, mit allen ihren Differentialcoëfficienten stetig. Hieraus ergibt sich folgender wichtiger Satz:

(8) Hat man zwei Lösungen  $\varphi$  und  $\psi$  der Gleichungen  $\Delta^2 \varphi + \kappa^2 \varphi = 0$  und  $\Delta^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0$ , welche auf einer Trennungsfläche zusammenstossen, so bilden diese beiden Lösungen zusammen eine einzige überall stetige Lösung,

wenn nur beide so beschaffen sind, dass auf der Trennungsfläche  $q = \psi$ ;  $\frac{dq}{d\nu} = \frac{d\psi}{d\nu}$ .

Führt man in der Gleichung (7) die Differentiation nach  $\nu$  aus und berücksichtigt man, dass  $\frac{dr}{d\nu} + \cos(r\nu) = 0$  ist, so erhält man:

$$4\pi\psi_1 + \int \psi \frac{\cos(r\nu)}{r^2} \left(1 + \frac{x^2 r^2}{2} \dots\right) d\omega - \int \frac{d\psi}{r d\nu} \left(1 - \frac{x^2 r^2}{2} \dots\right) d\omega = 0.$$

Nun ist weiter, wie bereits erwähnt wurde:

$$-\frac{\cos(r\nu) d\omega}{r^2} = d\omega,$$

d. i. gleich dem Differential einer Kugelfläche vom Radius Eins, deren Centrum im Punkt 1 sich befindet. Man hat daher:

$$(9) \quad 4\pi\psi_1 = \int \psi \left(1 + \frac{x^2 r^2}{2} \dots\right) d\omega + \int \frac{d\psi}{r d\nu} \left(1 - \frac{x^2 r^2}{2} \dots\right) d\omega.$$

Für Punkte in unmittelbarer Nähe der Oberfläche lässt sich das erste Integral auf der rechten Seite in zwei Theile zerlegen, einen Theil mit dem Integrationsraum  $2\pi$ , welcher nur den Punkt 1 in sich begreift, und einen zweiten Theil mit demselben Integrationsraume, der sich jedoch über alle übrigen Punkte der Oberfläche erstreckt. Man hat daher für Punkte auf der Oberfläche:

$$(10) \quad \psi_1 = \frac{1}{2\pi} \int \psi \left(1 + \frac{x^2 r^2}{2} \dots\right) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\psi}{r d\nu} \left(1 - \frac{x^2 r^2}{2} \dots\right) d\omega.$$

Um endlich die Aufgabe zu lösen, die Function  $\psi$  innerhalb einer geschlossenen Oberfläche zu bestimmen, wenn  $\frac{d\psi}{d\nu}$  auf dieser Oberfläche gegeben ist, setze man in Gleichung (4):

$$q'' = \psi; \quad q' = \frac{\cos x r}{r} + f$$

und denke sich die unbekannte Function  $f$  so bestimmt, dass überall auf der Oberfläche  $\frac{dq'}{d\nu} = 0$  ist. Denkt man sich nun eine sehr kleine Kugel vom Radius  $a$  um den

Punkt 1 beschrieben, so ist auf der Oberfläche dieser kleinen Kugel  $\frac{dq'}{dv} = -\frac{1}{a^2} + \frac{df}{dv}$  und über diese Kugel integriert, hat man  $\int \frac{dq'}{dv} do = -4\pi$ . Nach den hier gegebenen Erörterungen stellt also  $q' \cos nt$  die Bewegung dar, wenn in einer geschlossenen Oberfläche mit festen Wänden ein Punkt 1 eine Gesamtbewegung  $-4\pi \cos nt$  ausstrahlt. Setzt man nun  $q' = F_{12}$ , um durch die beiden Exponenten 1 und 2 anzudeuten, dass  $F$  eine Function der Punkte 1 und 2 ist, so gibt Gleichung (4):

$$(11) \quad 4\pi\psi_1 = \int F_{12} \frac{d\psi_2}{dv} do_2.$$

Setzt man den Punkt 1 gerade in die Oberfläche, so erstreckt sich die Integration nur über eine Halbkugel und man hat für die Punkte auf der Oberfläche:

$$(12) \quad 2\pi\psi_1 = \int F'_{12} \frac{d\psi_2}{dv} do_2,$$

wobei natürlich jetzt  $F'$  eine andere Bedeutung hat, als  $F$ . Die meisten in diesem Paragraphen vorgetragenen Sätze finden sich, wenn auch in anderer Darstellung, in dem oben erwähnten Aufsätze des Hrn. Helmholtz, auf den ich hiermit zu verweisen mir erlaube.

### §. 3. Allgemeine Lösung der Aufgabe.

Mit diesem analytischen Handwerkszeug ausgestattet, ist man nunmehr im Stande, die im Eingange dieses Aufsatzes angedeuteten Aufgaben zu lösen.

Um nun zunächst den Fall ins Auge zu fassen, wenn der Hohlraum, dessen Resonanz wir prüfen wollen, nur ein Loch besitzt, denken wir uns eine feste Ebene, denken uns dann in die Ebene das Loch des Hohlraums eingeschnitten und den Hohlraum hinter der Ebene befestigt, so dass er durch das Loch mit dem vor der Ebene liegenden unendlichen Raume in Verbindung steht. Das Centrum des Loches sei auch das Centrum des Coordi-

natensystems und die auf der Ebene senkrecht stehende nach aussen gerichtete Linie die positive  $Z$ -Axe. Die beiden anderen Axen  $X$  und  $Y$  liegen dann in der Ebene selbst.

Denkt man sich vorerst, dass in der Ebene kein Loch sei, so wird eine Welle, für welche  $\varphi = \frac{H}{\kappa} \cos(\eta x + \vartheta z + nt)$  ist, von der Ebene reflectirt werden, so dass das  $\varphi$  der reflectirten Welle gleich  $\frac{H}{\kappa} \cos(\eta x - \vartheta z + nt)$  ist. Beide Wellen zusammen geben:

$$\varphi = \frac{2H}{\kappa} \cos \vartheta z \cos(\eta x + nt).$$

Hierbei ist natürlich  $\eta^2 + \vartheta^2 = \kappa^2$ . Auf der ganzen festen Ebene wird, wie das Problem verlangt  $\frac{d\varphi}{dz} = 0$ . Ist nun aber in der Ebene ein Loch, so geräth die Luft auf diesem Loche in Bewegung. Diese bis jetzt noch unbekannte Bewegung sei dargestellt durch:

$$\frac{d\varphi}{dv} = -2\pi\gamma \cos nt + 2\pi\sigma \sin nt;$$

alsdann ist nach (6) §. 1:

$$\varphi = \int \frac{\gamma \cos(\kappa r - nt)}{r} do + \int \frac{\sigma \sin(\kappa r - nt)}{r} do.$$

Die Gesamtbewegung im äusseren Luftraume wird also dargestellt durch:

$$(1) \quad \varphi_a = \frac{2H}{\kappa} \cos \vartheta z \cos(\eta x + nt) + \int \frac{\gamma \cos(\kappa r - nt)}{r} do + \int \frac{\sigma \sin(\kappa r - nt)}{r} do.$$

Sind alle Durchmesser des Loches im Verhältniss zur Wellenlänge  $\lambda$  des Tones, dessen Resonanz im Loche wir prüfen wollen, sehr klein und bezeichnet man die Entfernung des Punktes 1 im äusseren Luftraume vom Centrum des Loches mit  $r_0$ , so ist  $r - r_0$  im Verhältniss zur Wellenlänge auf dem ganzen Loche sehr klein, also da  $\kappa = 2\pi:\lambda$  ist,  $\kappa(r - r_0)$  ein kleiner Bruch, und man hat annähernd  $\cos(\kappa r - nt) = \cos(\kappa r_0 + \kappa(r - r_0) - nt) = \cos(\kappa r_0 - nt)$ . Ist nun auch die Entfernung des Punktes 1 im äusseren Luft-

raume vom Centrum des Loches im Verhältniss zu den Durchmesser des Loches sehr gross, so hat man für das Wellenpotential der vom Loche ausgehenden Bewegung den Ausdruck:

$$\frac{\cos(\pi r_0 - nt)}{r_0} \int \gamma do + \frac{\sin(\pi r_0 - nt)}{r_0} \int \sigma do.$$

Bezeichnet man beide Integrale einfach durch  $C$  und  $S$ , so ist die Amplitude der Bewegung im Quadrat in sehr grosser Entfernung:

$$(2) \quad \frac{\pi^2 (C^2 + S^2)}{r_0^2}.$$

Man kann also  $C^2 + S^2$  als Maass der Stärke des durch Resonanz aus dem Hohlraum erzeugten Tones ansehen.

Für Punkte auf dem Loch sind  $\pi r$  und  $\eta x$  kleine Brüche, also  $\cos \pi r = 1$ ;  $\sin \pi r = \pi r$ ;  $\sin \eta x = \eta x$ ;  $\int x do = 0$ , weil der Mittelpunkt des Loches als Coordinaten-centrum angenommen wurde. Aus (1) erhält man daher, wenn man  $q = q' \cos nt + q'' \sin nt$  setzt:

$$(3) \quad \begin{cases} q' = \int \frac{\gamma}{r} do + \pi S + \frac{2H}{\pi}; & \frac{dq'}{dv} = -2\pi\gamma. \\ q'' = \pi C - \int \frac{\sigma}{r} do; & \frac{dq''}{dv} = 2\pi\sigma. \end{cases}$$

Nun kann man nach (11) und (12) in §. 2 die beiden Functionen  $q'$  und  $q''$  innerhalb des Hohlraumes aus den an der Oberfläche gegebenen Werthen für  $\frac{dq'}{dv}$  und  $\frac{dq''}{dv}$  bestimmen, wenn man den Hohlraum als durch die Ebene des Loches geschlossen ansieht. Man hat nämlich aus (3):

$$q' = \int \frac{\gamma}{r} do + \pi S + \frac{2H}{\pi}$$

und nach (11) §. 2, wenn man aus (3)  $\frac{dq'}{dv} = -2\pi\gamma$  einsetzt:

$$q_1' = -\frac{1}{2} \int F_{12} \gamma_2 do_2;$$

also wenn man beide Ausdrücke gleich setzt:



$$(4) \quad \begin{cases} \kappa S + \frac{2H}{\kappa} = - \int \left( \frac{1}{r} + \frac{F_{13}}{2} \right) \gamma_2 d\sigma_2, \\ \kappa C = \int \left( \frac{1}{r} + \frac{F_{12}}{2} \right) \sigma_2 d\sigma_2. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung findet man gerade so, wie die erste aus (3) und (11) §. 2.

Hiermit sind die Functionen  $\gamma$  und  $\sigma$  vollkommen defnirt. Die Lösung unserer Aufgabe ist sonach auf die Lösung der beiden Gleichungen (4) zurückgeführt. Diese Gleichungen sagen aus, dass man die Functionen  $\gamma$  und  $\sigma$  so zu bestimmen hat, dass sie die beiden Integrale auf der rechten Seite constant machen. Im Innern des Holraumes hat man nach (11) §. 2:

$$(5) \quad \varphi_i = -\frac{1}{2} \cos nt \int F_{12} \gamma_2 d\sigma_2 + \frac{1}{2} \sin nt \int F_{12} \sigma_2 d\sigma_2.$$

Hier erfüllen also die beiden Functionen  $\varphi_a$  und  $\varphi_i$  in (1) und (5) die Bedingung  $\Delta^2 \varphi + \kappa^2 \varphi = 0$ . An der Trennungsfläche, wo beide zusammenstossen, ist nach (4) und

(5)  $\varphi_a = \varphi_i$ . Ferner ist  $\frac{d\varphi_a}{d\nu} = \frac{d\varphi_i}{d\nu} = -2\pi\gamma \cos nt + 2\pi\sigma \sin nt$  auf der Trennungsfläche. Es bilden also nach (8) (§. 2) die beiden Lösungen  $\varphi_a$  und  $\varphi_i$  eine zusammenhängende, in allen Differentialcoëfficienten und überall stetige Lösung der Differentialgleichung  $\Delta^2 \varphi + \kappa^2 \varphi = 0$ .

Hat man eine Function  $\gamma$  gefunden, welche der ersten der beiden Gleichungen (4) entspricht, so ist  $\sigma$  leicht zu bestimmen. Denn es ist  $\sigma$  offenbar gleich einer Constanten mal  $\gamma$  und diese Constante bestimmt sich durch die Gleichung:

$$\gamma : \sigma = - \left( \kappa S + \frac{2H}{\kappa} \right) : \kappa C.$$

Hieraus folgt:

$$C : S = - \left( \kappa S + \frac{2H}{\kappa} \right) : \kappa C$$

und hieraus wieder:

$$(6) \quad z^2 (C^2 + S^2) = \frac{4H^2 S^2}{z^2 (C^2 + S^2)}.$$

Dieser Ausdruck ist nach (2) das Maass der Stärke des Resonanztones und ist im Maximum gleich:

$$\frac{4H^2}{z^2}.$$

Ist aber die Stärke des Resonanztones ein Maximum, so ist die entsprechende Schwingungszahl die Schwingungszahl des Tones, welchen der Hohlraum angeblasen hören lässt.

Es lassen also Hohlräume mit einer Oeffnung, welche angeblasen den gleichen Ton geben, diesen Ton, wenn er von aussen erregt wird, in gleicher Stärke wiederklingen, welches auch die Gestalt dieser Hohlräume und ihrer Oeffnungen sein mag.

Die Gleichung (6) kann man auch auf viel einfachere Weise dadurch finden, dass man die mittlere aus dem Loche austretende Arbeit:

$$\int \left( q' \frac{d q''}{d v} - q'' \frac{d q'}{d v} \right) d o = 0$$

berechnet und dabei berücksichtigt, dass:

$$\int \sigma d o \int \frac{\gamma d o}{r} = \int \gamma d o \int \frac{\sigma d o}{r}.$$

#### §. 4. Allgemeine Gleichung für die Schwingungszahl.

Die Auflösung der Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen ist eine sehr schwierige Aufgabe, hauptsächlich deswegen schwierig, weil man im allgemeinen die Function  $q$  aus einem gegebenen  $\frac{d q}{d v}$  nicht bestimmen kann. Für einen cylindrischen Hohlraum gelingt die Lösung zwar mit Hülfe der sogenannten Bessel'schen Functionen, die Ausrechnung in Zahlen ist aber so umständlich und schwierig, dass ich darauf verzichte, diese Lösung hier vorzutragen.

Von physikalischem Interesse ist weniger die Kenntniss der Functionen  $\gamma$  und  $\sigma$ , als die Bestimmung der

Wellenlänge des Tones, für welchen die Resonanz ein Maximum wird, und um diese ziemlich genau zu finden, genügt schon eine angenäherte Auflösung der Gleichungen (4) §. 3.

Für den cylindrischen Hohlraum z. B. können wir wenigstens das Integral  $\int \varphi do$  aus dem Integral  $\int \frac{d\varphi}{dv} do$  leicht bestimmen. Es ist nämlich nach §. 2 (3):

$$\int \frac{d\varphi'}{dv} do + \kappa^2 \int \varphi' d\tau = 0.$$

Ist der Hohlraum ein Cylinder von der Länge  $l$ , für welchen also am Boden  $z = -l$  ist, so hat man, wenn man ihn nur vom Boden bis zum Querschnitt bei  $z$  in Betracht zieht:

$$\int \frac{d\varphi'}{dz} do + \kappa^2 \int_{-l}^z \int \varphi' do = 0.$$

Differenzirt man noch einmal nach  $z$ , so hat man:

$$\frac{d^2}{dz^2} \int \varphi' do + \kappa^2 \int \varphi' do = 0.$$

Die allgemeine Auflösung dieser Differentialgleichung ist:

$$\int \varphi' do = G \cos \kappa (z + c)$$

und sind  $G$  und  $c$  die Integrationsconstanten. Die Constante  $c$  bestimmt sich durch die Bemerkung, dass  $\frac{d\varphi'}{dz}$  am Boden verschwindet; dies gibt  $c = l$  und man hat auf dem Loche:

$$\int \varphi' do = G \cos \kappa l; \quad \int \frac{d\varphi'}{dv} do = -G \kappa \sin \kappa l.$$

Das Verhältniss dieser beiden Grössen bestimmt sich daher durch die Gleichung:

$$(1) \quad \kappa \sin \kappa l \int \varphi' do + \cos \kappa l \int \frac{d\varphi'}{dv} do = 0.$$

Substituirt man weiter für  $\varphi'$  und  $\frac{d\varphi'}{dv}$  die in (3) §. 3 gegebenen Ausdrücke, so hat man (den Querschnitt gleich  $Q$  gesetzt):

$$x \sin x l \int d\sigma \int \frac{\gamma d\sigma}{r} + x^2 Q S \sin x l + 2 Q H \sin x l - 2 \pi C \cos x l = 0,$$

und wenn man das erste Glied noch mit  $1 = C: \int \gamma d\sigma$  multiplicirt, hat man:

$$(2) \begin{cases} C \left( -2 \pi \cos x l + x \sin x l \int d\sigma \int \frac{\gamma d\sigma}{r} : \int \gamma d\sigma \right) \\ \quad + S Q x^2 \sin x l + 2 H Q \sin x l = 0, \\ C Q x^2 \sin x l - S \left( -2 \pi \cos x l + x \sin x l \int d\sigma \int \frac{\sigma d\sigma}{r} : \int \sigma d\sigma \right) = 0. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung ergibt sich gerade so wie die erste aus (3) §. 3.

Aus diesen zwei Gleichungen lässt sich nun  $C^2 + S^2$  durch  $H$  bestimmen. Die hier angewendete Methode lässt sich auch leicht verallgemeinern. Wie man nämlich schon durch den blossen Anblick gewahr wird, ist die Gleichung (1) nur ein specieller Fall der allgemeineren Gleichung:

$$\int \varphi' \frac{d\psi}{dv} d\sigma - \int \psi \frac{d\varphi'}{dv} d\sigma = 0.$$

Man erhält nämlich (1) aus dieser Gleichung, wenn man  $\psi = \cos x (x + l)$  setzt.

Um nun zwei den Gleichungen (2) entsprechende Gleichungen für einen beliebigen Hohlraum zu erhalten, suche man eine Function  $\psi$ , welche der Bedingung  $\Delta^2 \psi + x^2 \psi = 0$  entspricht, für welche  $\frac{d\psi}{dv}$  überall auf der inneren Oberfläche des Hohlraumes mit Ausnahme des Loches verschwindet und  $\psi_0$  auf dem Loche constant ist. Man that alsdann, wenn man die Ausdrücke in 3 (§. 3) substituirt und die soeben angeschriebene Gleichung anwendet:

$$(3) \begin{cases} C \left( 2 \pi \psi_0 + \int \frac{d\psi}{dv} d\sigma \int \frac{\gamma}{r} d\sigma : \int \gamma d\sigma \right) + S x \int \frac{d\psi}{dv} d\sigma = - \frac{2 H}{x} \int \frac{d\psi}{dv} d\sigma. \\ - C x \int \frac{d\psi}{dv} d\sigma + S \left( 2 \pi \psi_0 + \int \frac{d\psi}{dv} d\sigma \int \frac{\sigma d\sigma}{r} : \int \sigma d\sigma \right) = 0. \end{cases}$$

Nun sind die Functionen  $\gamma$  und  $\sigma$ , wie wir am Schlusse des §. 3 gesehen haben, bis auf eine mit ihnen multiplicirte Constante identisch, es ist somit:

$$\int \frac{\gamma do}{r} : \int \gamma do = \int \frac{\sigma do}{r} : \int \sigma do$$

und man kann die beiden soeben erhaltenen Gleichungen kürzer schreiben:

$$C\beta + S\alpha = -\frac{2H\alpha}{x^2}; \quad -C\alpha + S\beta = 0,$$

und diese beiden Gleichungen geben, wenn man sie quadriert und addirt:

$$x^2(C^2 + S^2) = \frac{4H^2\alpha^2}{x^2(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Dieser Ausdruck, welcher nach (2) §. 3 das Maass für die Stärke des wiederklingenden Tones ist, wird ein Maximum für  $\beta = 0$ . Man hat daher, wenn man für  $\beta$  den Werth aus (3) setzt:

$$(4) \quad 2\pi\psi_0 + \int \frac{d\psi}{d\nu} do \int \frac{\gamma do}{r} : \int \gamma do = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt also die Schwingungszahl des Tones, welchen ein Hohlraum mit einer Oeffnung hören lässt, wenn er an dieser Oeffnung angeblasen wird. Die Function  $\psi$  hat hierbei die oben angegebenen Bedingungen zu erfüllen und die bis jetzt noch unbekannte Function  $\gamma$  ist noch annähernd zu bestimmen.

#### §. 5. Lösung für den Cylinder.

Für den cylindrischen Hohlraum entspricht man den angegebenen Bedingungen für  $\psi$ , wenn man setzt:  $\psi = \cos x(z+l)$ . Man hat alsdann:  $\psi_0 = \cos xl$ ;  $\frac{d\psi_0}{d\nu} = -x \sin xl$  und die Gleichung (4) §. 4 wird:

$$(1) \quad 2\pi \cos xl - x \sin xl \int do \int \frac{\gamma do}{r} : \int \gamma do = 0.$$

Es bleibt jetzt noch  $\gamma$  annähernd zu bestimmen. Setzt man das  $\varphi'$ , welches dem  $\frac{d\varphi'}{d\nu} = -2\pi\gamma$  entspricht, gleich  $\Gamma$ , so erhält die erste der Gleichungen (4) §. 3 die übersichtlichere Form:

$$\int \frac{\gamma d\phi}{r} + \Gamma = -\alpha S - \frac{2H}{\alpha} = \text{Constant.}$$

Ist der Querschnitt kreisförmig und  $\gamma$  über den ganzen Querschnitt gleich Eins, so hat man, wie hier nicht näher nachgewiesen werden soll:

$$\int \frac{\gamma d\phi}{r} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - \phi^2 \sin^2 \phi} d\phi.$$

Hier bedeutet  $R$  den Radius des Querschnittes und  $\phi$  die Entfernung desjenigen Punktes vom Centrum, für welchen man das Integral bestimmen will. Ist nun  $\gamma$  constant, so ist auch  $\Gamma$  constant, und man erhält das Resultat, dass der Ausdruck (1) anstatt constant zu sein, gegen den Rand des Kreises zu abnimmt.

Bestimmt man dagegen  $\gamma$  so, dass  $\int \frac{\gamma d\phi}{r}$  constant wird, so ist, wie gleichfalls als bekannt hier vorausgesetzt wird,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{R^2 - \phi^2}}$ , nimmt also zu gegen den Rand. Nimmt aber  $\gamma$  zu gegen den Rand, so nimmt auch  $\Gamma$  zu gegen den Rand. Denn da  $\phi$  am Boden, wo  $z = -l$  ist, jedenfalls über den Boden sehr nahe constant ist, so hat man:

$$\int_{-l}^0 \frac{d\phi}{dz} dz = \phi_0 - \phi_{-l}.$$

Ist nun  $\frac{d\phi}{dz}$  am Rande grösser als in der Mitte, so ist auch  $\phi_0$  am Rande grösser als in der Mitte. Setzt man daher  $\int \frac{\gamma d\phi}{r} = \text{constant}$ , so nimmt der Ausdruck (1) gegen den Rand zu, anstatt constant zu sein.

Es ist also für den kreisförmigen Querschnitt  $\gamma$  eine Function, welche die Mitte hält zwischen constant und  $1:\sqrt{R^2 - \phi^2}$ .

Ist  $\gamma$  constant gleich Eins, so hat man:

$$\int d\phi \int \frac{\gamma d\phi}{r} = 8\pi \int_0^R \phi d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \sqrt{R^2 - \phi^2 \sin^2 \phi}.$$

Hier lässt sich die Integration leicht bewerkstelligen, wenn man zuerst nach  $\rho$  und dann nach  $\varphi$  integrirt; man erhält alsdann:

$$(3) \quad \int d\varphi \int \frac{\gamma d\rho}{r} : \int \gamma d\varphi = \frac{16R}{3}.$$

Verbreitet man eine Masse  $M$  so über eine Kreisfläche, dass ihre Potentialfunction auf dieser Fläche constant wird, so hat man, wenn man die Dichte mit  $\gamma$  bezeichnet:

$$\int \frac{\gamma}{r} d\varphi = \frac{\pi M}{2R}.$$

Es wird dies als bekannt hier gleichfalls vorausgesetzt. Man hat daher in diesem Fall:

$$(4) \quad \int d\varphi \int \frac{\gamma d\rho}{r} : \int \gamma d\varphi = \frac{\pi^2 R}{2}.$$

Vergleicht man die Ausdrücke (3) und (4), so findet man, dass ihr Unterschied nur etwa 1:12 des Ganzen beträgt. Setzt man, um irgend eine Wahl zu treffen, den Ausdruck (4) in die Gleichung (1) ein, so erhält man:

$$(5) \quad \text{ctg } \alpha l = \frac{\pi \alpha R}{4},$$

als transcendente Gleichung, aus welcher sich der Ton bestimmen lässt, den eine cylindrische Röhre hören lässt.

Die Schwingungszahl des Tones erhält man in folgender Weise: Es ist  $n:\alpha$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  des Schalles, die Schwingungszahl  $N = n:2\pi = \alpha v:2\pi$ .

Nun ist weiter  $\alpha = 2\pi$ : Wellenlänge; also  $\alpha R$  ein kleiner Bruch, wenn die Wellenlänge des Tones gross ist im Verhältniss zum Radius des Querschnitts der Röhre. Für diesen Fall erhält man aus (5) annähernd:

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \alpha R}{4}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2 \left( l + \frac{\pi R}{4} \right)}$$

und hieraus hat man:

$$(6) \quad N = \frac{v}{4l \left( 1 + \frac{\pi R}{4l} \right)},$$

zur Bestimmung der Schwingungszahl  $N$  des tiefsten Tones, welchen eine cylindrische, an einem Ende offene Röhre hören lässt, wenn ihre Länge  $l$  und der Radius des Querschnittes gleich  $R$  ist. Bei trockener Luft und  $0^\circ$  Temperatur hat man:

$$v = 332,260 \text{ m.}$$

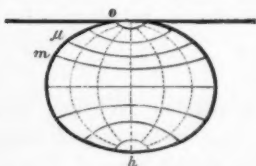
Setzt man den Werth (3) in die Gleichung (1) ein, so erhält man:

$$N = \frac{v}{4l \left(1 + \frac{8R}{3\pi l}\right)},$$

einen Ausdruck, der von dem vorigen nur wenig verschieden ist.

#### §. 6. Töne cubischer Pfeifen.

Unter einer cubischen Pfeife versteht man einen Hohlraum mit sehr dünner Wandung, in welche ein



Loch geschnitten ist, in der Weise, wie die Figur es darstellt. Sollen die nachfolgenden Erörterungen zutreffen, so muss die Ebene des Loches auch nahezu Tangentialebene für die an den Rand des Loches angrenzenden Theile der Oberfläche des Hohlraumes sein.

Die punktirten Linien zeigen an, in welcher Weise die Luft sich ungefähr im Innern des Hohlraums bewegt; die senkrecht darauf stehenden sind die Flächen des gleichen Druckes im Profil.

Bezeichnet man die Flächen des gleichen  $\psi$  durch  $F$ , so hat man für jede dieser Flächen aus:

$$\int \frac{d\psi}{dv} do + x^2 \int \psi d\tau = 0$$

die Gleichung:

$$F \left( \frac{d\psi}{dv} \right)_\mu + x^2 \int \psi d\tau = 0.$$



Die Integration rechts erstreckt sich hier jedesmal über den hinter dieser Fläche liegenden Raum und  $\left(\frac{d\psi}{dv}\right)_\mu$  bedeutet irgend einen Mittelwerth dieser Function auf der Fläche  $F$ . Da nun die Flächen  $F$  in der Nähe des Loches sehr klein sind, die Integrale rechts aber beständig nach hinten abnehmen bis zu Null, so sehen wir, dass die Function  $\psi$  längs der Umgrenzungscurve  $oumh$  bei dem Loche  $o$  sehr steil ansteigt. Ist z. B. das Loch 25 mal kleiner als der mittlere Durchschnitt des Hohlraumes, so ist die Tangente der Curve  $\psi$ , wenn man sie über  $oumh$  graphisch darstellt, in der Mitte mindestens 25 mal kleiner als in unmittelbarer Nähe des Loches. Die Function  $\psi$  wächst also hinter dem Loche sehr rasch und wird im Innern nahezu constant.

Um die Hilfsfunction  $\psi$ , aus welcher wir die Tonhöhe ableiten, näher zu bestimmen, bedienen wir uns der Gleichung (10) §. 2:

$$\psi_1 = \frac{1}{2\pi} \int \psi \left(1 + \frac{x^2 r^2}{2} \dots\right) d\omega + \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\psi}{r dv} \left(1 - \frac{x^2 r^2}{2} \dots\right) do.$$

Nun ist, wenn wir das Volumen des Hohlraumes mit  $V$  bezeichnen:

$$\int \frac{d\psi}{dv} do = -x^2 \int \psi dv = -x^2 V \psi_m,$$

und bedeutet hierbei  $\psi_m$  ein mittleres  $\psi$  im Innern des Hohlraumes. Es ist also:

$$\int \frac{d\psi do}{r dv}$$

die Potentialfunction einer Masse  $-x^2 V \psi_m$ , welche über das Loch in irgend einer noch näher zu bestimmenden Weise verbreitet ist. Nennt man diese Function  $-U$ , so hat man:

$$\psi_1 = \frac{1}{2\pi} \int \psi \left(1 + \frac{x^2 r^2}{2} \dots\right) d\omega - \frac{U}{2\pi} \left(1 - \frac{x^2 r_\mu^2}{2} \dots\right),$$

und  $r_\mu$  bedeutet hier irgend einen mittleren Werth der Entfernungen aller Punkte des Loches vom Punkt 1. Auf

dem Loche selbst ist  $x^2 r_\mu^2$  verschwindend klein; man hat daher:

$$(1) \quad \psi_0 = \frac{1}{2\pi} \int \psi \left( 1 + \frac{x^2 r^2}{2} \dots \right) d\omega - \frac{U_0}{2\pi},$$

und da das Integral rechts auf dem Loche sehr nahe überall den gleichen Werth besitzt, (um so mehr, je kleiner das Loch ist) und  $\psi_0$  der über diese Function in §. 4 gemachten Voraussetzung nach auf dem Loche constant ist, so ist auch  $U_0$  sehr nahe constant auf dem Loche. Da nun, wie oben dargelegt wurde,  $U$  die Potentialfunction einer Masse  $x^2 V \psi_m$  ist, so hat man für ein kreisförmiges Loch vom Radius  $R$ :

$$\frac{U_0}{2\pi} = \frac{x^2 V \psi_m}{4R}.$$

Wir haben jetzt noch das Integral auf der rechten Seite in (1) zu betrachten. Man sieht sehr leicht ein, dass dieses Integral sehr nahe gleich  $\psi_m$  sein muss, weil ja nach der oben vorausgeschickten Bemerkung über den Verlauf der Function  $\psi$  diese im ganzen inneren Hohlraume nahezu constant ist. Bis zu welchem Grade der Annäherung dies der Fall ist, zeigt folgende Betrachtung:

Bezeichnet man, um zuerst das Integral  $\frac{1}{2\pi} \int \psi d\omega = \psi_\mu$  zu betrachten, die Randcurve  $o\mu mh$  durch  $s$ , so hat man offenbar, wenn man sich an das Eingangs gesagte erinnert:

$$\frac{d\psi}{ds} < \frac{x^2 V \psi_m}{F}.$$

Durch Integration erhält man hieraus:

$$\psi_\mu - \psi_m < \frac{x^2 V \psi_m s}{F_m},$$

wobei  $s$  die Strecke von  $\mu$  zu  $m$  auf der Randcurve und  $F_m$  etwa den mittleren Durchschnitt des Hohlraumes bezeichnet; man hat also, wenn  $\beta$  einen unbestimmten positiven oder negativen Bruch bedeutet:

$$(2) \quad \psi_\mu = \psi_m \left( 1 + \frac{x^2 V \beta s}{F_m} \right).$$

Um nun weiter eine angenäherte Vorstellung von der Grösse  $s$  zu bekommen, ist folgende Bemerkung von Nutzen: das Integral einer Function über eine Linie, Fläche oder einen Raum ausgedehnt, ist gleich dieser Linie, Fläche oder diesem Raum mal einem Mittelwerth, welchen die Function auf dieser Linie, Fläche oder in diesem Raume besitzt. Von diesem Satze haben wir bereits stillschweigend Gebrauch gemacht. Verläuft nun weiter, (und dies ist es, worauf hier aufmerksam gemacht werden soll), diese Function so, dass sie in der einen Hälfte rascher zunimmt, als in der anderen, so liegt der Mittelwerth, welcher das Integral vorstellt, in derjenigen Hälfte, wo die raschere Zunahme stattfindet.

Nun ist der Integrationsraum des Integrals in (1) das Gesichtsfeld, welches sich, vom Loche aus gesehen, über die innere Oberfläche des Hohlraumes ausbreitet, und es liegt demnach der Werth  $\psi_\mu$  innerhalb einer Zone des Gesichtsfeldes, deren Höhe, vom Loche aus gerechnet,  $30^\circ$  beträgt; denn diese Zone theilt das ganze Gesichtsfeld in zwei gleiche Theile; ebenso ist  $\psi_m$  in derjenigen Hälfte des Hohlraumes, welche gegen das Loch gerichtet ist. Somit liegen die Punkte  $\mu$  und  $m$  auf der Peripherie nahe aneinander und bedeutet  $\beta s$  jedenfalls nur einen kleinen Bruchtheil der ganzen Linie  $oumh$ .

Ebenso hat man:

$$\iint r^2 dr d\omega = \int \frac{r^3}{3} d\omega = V; \quad \int r^2 d\omega = \frac{3V}{r_\mu},$$

wobei  $r_\mu$  hier wieder einen mittleren Werth der Entfernungen aller Punkte der Oberfläche vom Loche bedeutet; man hat somit:

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int \psi \frac{x^2 r^2}{2} d\omega = \frac{3x^2 V \psi_m}{4\pi r_\mu}.$$

Aus (2) und (3) zusammen hat man:

$$\frac{1}{2\pi} \int \psi \left(1 + \frac{x^2 r^2}{2}\right) d\omega = \psi_m \left(1 + \frac{3x^2 V}{4\pi r_\mu} + \frac{x^2 V \beta s}{F_m}\right).$$

Setzt man nun:

$$\frac{3\kappa^2 V}{4\pi r_\mu} + \frac{\kappa^2 V \beta s}{F_m} = \frac{3\kappa^2 V}{4\pi r_\mu} \left(1 + \frac{4\pi r_\mu \beta s}{3F_m}\right),$$

so sieht man, dass das zweite Glied positiv oder negativ kleiner ist als Eins, dass man also beide zusammen, weil ja  $r_\mu$  doch unbestimmt ist, in die bequemere Form:

$$\frac{\kappa^2 V}{4r_\mu}$$

bringen darf. Man hat also schliesslich aus (1):

$$(4) \quad \psi_0 = \psi_m \left(1 - \frac{\kappa^2 V}{4R} + \frac{\kappa^2 V}{4r_\mu}\right).$$

Die vollständige Auflösung der Gleichung (4) §. 4, welche den Ton eines Hohlraumes bestimmt, verlangt ausser der Kenntniss des Verhältnisses:

$$\psi_0 : \int \frac{d\psi}{d\nu} d\nu = \psi_0 : -\kappa^2 V \psi_m$$

auch die Kenntniss der Function  $\gamma$ . Nun sehen wir aus der Gleichung (1) und der darauf folgenden Definition von  $U$ , dass  $\psi_0$  constant ist, wenn  $\int \frac{d\psi_0}{r d\nu} d\nu$  constant ist, dass also, wenn wir wieder die Bezeichnung im Anfang des §. 5 einführen,  $\Gamma$  constant ist, wenn  $\int \frac{\gamma}{r} d\nu$  constant ist. Die Gleichung (2) §. 5, welche  $\gamma$  definirt:

$$\int \frac{\gamma d\nu}{r} + \Gamma = \text{Constant},$$

wird also für den cubischen Hohlraum erfüllt, wenn wir das Integral constant setzen. Ist aber das Integral constant, so wird für ein kreisförmiges Loch:

$$\int \frac{\gamma}{r} d\nu : \int \gamma d\nu = \frac{\pi}{2R},$$

und da  $\int \frac{d\psi}{d\nu} d\nu = -\kappa^2 V \psi_m$  ist, so wird die Gleichung (4) §. 4:

$$(5) \quad 2\pi\psi_0 - \frac{\pi\kappa^2 V \psi_m}{2R} = 0,$$

und wenn man hier wieder das  $\psi_0$  aus (4) substituirt, erhält man:

$$(6) \quad 2\pi\psi_0 + \int \frac{d\psi}{dv} d\sigma \int \frac{\chi}{r} d\sigma : \int \gamma d\sigma = 2\pi\psi_m \left[ 1 - \frac{x^2 V}{2R} + \frac{x^2 V}{4r_\mu} \right].$$

Die Gleichung:

$$x^2 = \frac{2R}{V \left( 1 - \frac{R}{2r_\mu} \right)}$$

zeigt also den Ton an, welchen eine cubische Pfeife gibt. Für die Schwingungszahl  $N$  erhält man den Ausdruck:

$$(7) \quad N = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{2R}{V \left( 1 - \frac{R}{2r_\mu} \right)}}.$$

Hierin bedeutet  $v$  die Geschwindigkeit des Schalles,  $R$  den Radius des kreisförmigen Loches,  $V$  das Volumen des Hohlraumes,  $r_\mu$  eine unbestimmte mittlere Entfernung aller Punkte der Oberfläche des Hohlraumes vom Loche.

#### §. 7. Cubische Pfeife mit cylindrischem Ansatz.

Hat der Hohlraum einen cylindrischen Ansatz, so ist dessen Eigenton nach den seitherigen Ergebnissen nicht schwer zu bestimmen. Bezeichnet man nämlich die Mündung des cylindrischen Ansatzes mit  $o$ , die Stelle, wo er aus dem Hohlraum austritt, mit  $a$ , so hat man im cylindrischen Raume  $\psi = \cos x(z+c)$ , wobei  $c$  eine noch zu eliminirende Constante bedeutet, also:

$$\psi_0 = \cos xc, \quad \frac{d\psi_0}{dv} = -x \sin xc$$

und zur Bestimmung des Tones nach (5) §. 5 die Gleichung:

$$(1) \quad \text{ctg } xc = \frac{\pi x R}{4}.$$

Ist ferner  $l$  die Länge des cylindrischen Ansatzes, so hat man weiter:

$$(2) \quad \psi_a = \cos x(c-l); \quad \frac{d\psi_a}{dv} = -x \sin x(c-l).$$

Bezeichnet man weiter das  $\psi$  im Innern des cubischen Hohlraumes mit  $\psi_m$ , so hat man nach (4) §. 6:

$$(3) \quad \psi_a = \psi_m \left( 1 - \frac{x^2 V}{4R} + \frac{x^2 V}{4r_\mu} \right); \quad \frac{d\psi_a}{d\nu} = - \frac{x^2 V \psi_m}{\pi R^2}.$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke (2) und (3) findet man nun:

$$\cos xc \cos xl + \sin xc \sin xl = \psi_m \left( 1 - \frac{x^2 V}{4R} + \frac{x^2 V}{4r_\mu} \right),$$

$$-\cos xc \sin xl + \sin xl \cos xl = \psi_m \frac{x V}{\pi R^2},$$

und hieraus durch eine leichte Rechnung:

$$\cos xc = \psi_m \left( 1 - \frac{x^2 V}{4R} + \frac{x^2 V}{4r_\mu} \right) \cos xl - \psi_m \frac{x V}{\pi R^2} \sin xl,$$

$$\sin xc = \psi_m \left( 1 - \frac{x^2 V}{4R} + \frac{x^2 V}{4r_\mu} \right) \sin xl + \psi_m \frac{x V}{\pi R^2} \cos xl.$$

Diese Ausdrücke in (1) substituiert gibt:

$$\left[ 1 - \frac{x^2 V}{2R} \left( 1 - \frac{R}{2r_\mu} \right) \right] \cos xl - \frac{V x \sin xl}{\pi R^2} \left[ 1 - \frac{\pi^2 R^3}{4V} + \frac{\pi x^2 R^2}{16} \left( 1 - \frac{R}{r_\mu} \right) \right] = 0$$

Da nun den gemachten Voraussetzungen nach  $R^3:V$  und  $x^2 R^2$  kleine Brüche sind, die man vernachlässigen darf, so reducirt sich der Coefficient des zweiten Gliedes auf Eins und man hat:

$$(4) \quad xl \operatorname{tg} xl + \frac{\pi x^2 R l}{2} \left( 1 - \frac{R}{2r_\mu} \right) = \frac{\pi R^2 l}{V}.$$

Diese Gleichung bestimmt den Ton, welchen ein cubischer (bauchiger) Hohlraum mit cylindrischem Ansatz hören lässt. Bezeichnet man mit  $N$  die Schwingungszahl des Tones, mit  $v$  die Geschwindigkeit des Schalles, so hat man, wie bereits oben in §. 5 auseinander gesetzt wurde:

$$N = \frac{xv}{2\pi},$$

$l$  ist die Länge des cylindrischen Ansatzes,  $R$  der Radius seines Querschnittes,  $V$  das Volumen des bauchigen Hohlraumes,  $r_\mu$  eine unbestimmte mittlere Entfernung aller Punkte des Hohlraumes von der Stelle, wo der Ansatz aus dem Hohlraume austritt.

Für  $l$  gleich Null hat man wieder die Gleichung (7) §. 6 für den cubischen Hohlraum.

Ist der cylindrische Raum im Verhältniss zum bauchigen sehr klein, so wird der Ausdruck in Gleichung (4) auf der rechten Seite ein kleiner Bruch,  $\kappa l \operatorname{tg} \kappa l = \kappa^2 l^2$ , und man hat:

$$(5) \quad N = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{2R}{V \left(1 + \frac{2l}{\pi R} - \frac{R}{2r_\mu}\right)}}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel für den Hohlraum ohne Ansatz, so sieht man, dass schon ein ganz niedriger cylindrischer Ansatz genügt, um den Ton der cubischen Pfeife bedeutend niederer zu machen. Dies ist auch der Grund, warum Hr. Sondhauss die Töne cubischer Pfeifen tiefer gefunden hat, als die von Hrn. Helmholtz zuerst aufgestellte Formel:

$$N = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{2R}{V}}$$

verlangt, denn bei allen cubischen Pfeifen haben die Wandungen eine gewisse Dicke; sie müssen daher als Pfeifen mit cylindrischem Ansatz angesehen werden.

Ist der Bruch auf der rechten Seite der Gleichung (4) nicht sehr klein, so genügt man nicht mehr mit der Annahme  $\operatorname{tg} \kappa l = \kappa l$ ; man muss vielmehr setzen:  $\operatorname{tg} \kappa l = \kappa l + \frac{\kappa^3 l^3}{3}$  und hat zur Bestimmung der Tonhöhe die Näherungsformel:

$$(6) \quad N = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi R^2}{Vl \left(1 + \frac{\pi R}{2l} + \frac{\pi l R^2}{3V}\right)}}.$$

Ist endlich der cylindrische Ansatz gross im Verhältniss zum Hohlraume, so wird  $\kappa l$  in (4) sehr nahe gleich  $\pi/2$ , und man hat die Näherungsformel:

$$(7) \quad N = \frac{v}{4l \left(1 + \frac{V}{\pi l R^2}\right)}.$$

Der Ton ist also wenig verschieden von dem Ton des gewöhnlichen cylindrischen Hohlraumes.

Die Formel (6) stimmt mit der von Sondhauss beobachteten empirischen Formel:

$$N = C \sqrt{\frac{\pi R^2}{l}}$$

überein, wenn  $\pi R:2l$  ein kleiner Bruch ist.

### §. 8. Hohlräume mit zwei Oeffnungen.

Das Problem der Resonanz in Hohlräumen mit zwei Löchern fixiren wir analytisch folgendermaassen. Es sind zwei parallele Ebenen gegeben, zwischen welchen sich ein Hohlraum befindet, und dieser Hohlraum mündet in zwei Löchern auf die beiden Ebenen aus. Auf der einen Seite trifft nun eine Welle auf den Hohlraum und man soll die Bewegung bestimmen, welche infolge davon entsteht.

Trifft von einer Seite eine Welle auf das dort befindliche Loch  $a$ , so hat man, wie oben in §. 3 (3):

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi'_a = \int \frac{\gamma_a d\sigma}{r} + \kappa S_a + \frac{2H}{\kappa}; & \frac{d\varphi'_a}{d\nu} = -2\pi\gamma_a; \\ \varphi''_a = \kappa C_a - \int \frac{\sigma_a d\sigma}{r}; & \frac{d\varphi''_a}{d\nu} = 2\pi\sigma_a. \end{cases}$$

Ebenso hat man, wenn man die entsprechenden Functionen auf dem zweiten Loche mit dem Index  $b$  bezeichnet:

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi'_b = \int \frac{\gamma_b d\sigma}{r} + \kappa S_b; & \frac{d\varphi'_b}{d\nu} = -2\pi\gamma_b; \\ \varphi''_b = \kappa C_b - \int \frac{\sigma_b d\sigma}{r}; & \frac{d\varphi''_b}{d\nu} = 2\pi\sigma_b. \end{cases}$$

Die Gleichungen §. 3 (4) zur Bestimmung der Functionen  $\gamma$  und  $\sigma$  werden nun, weil hier zwei Löcher vorhanden sind:

$$(3) \quad \begin{cases} \kappa S_a + \frac{2H}{\kappa} = -\int \gamma_a \left( \frac{1}{r} + F_{1a2a} \right) d\sigma - \int \gamma_b F_{1a2b} d\sigma, \\ \kappa S_b = -\int \gamma_b \left( \frac{1}{r} + F_{1b2b} \right) d\sigma - \int \gamma_a F_{1b2a} d\sigma, \\ \kappa C_a = \int \sigma_a \left( \frac{1}{r} + F_{1a2a} \right) d\sigma + \int \sigma_b F_{1a2b} d\sigma, \\ \kappa C_b = \int \sigma_b \left( \frac{1}{r} + F_{1b2b} \right) d\sigma + \int \sigma_a F_{1b2a} d\sigma. \end{cases}$$



Aus den beiden ersten Gleichungen bestimmt sich  $\gamma_a$  und  $\gamma_b$ . Sind diese Functionen bestimmt, so hat man nur zu setzen:

$$\gamma_a : \sigma_a = \left( \kappa S_a + \frac{2H}{\kappa} \right) : - \kappa C_a = \gamma_b : \sigma_b,$$

um auch die beiden letzten Gleichungen aufzulösen, und es ist:

$$\int \frac{\gamma_a d\sigma}{r} : \int \gamma_a d\sigma = \int \frac{\sigma_a d\sigma}{r} : \int \sigma_a d\sigma; \quad \int \frac{\gamma_b d\sigma}{r} : \int \gamma_b d\sigma = \int \frac{\sigma_b d\sigma}{r} : \int \sigma_b d\sigma.$$

Sind die beiden Löcher gleich und ist der Hohlraum von der Mitte aus gerechnet symmetrisch, so ist auch, wie man sich leicht überzeugt,  $\gamma_a : \gamma_b = \text{constant}$  und man hat:

$$\int \frac{\gamma_a d\sigma}{r} : \int \gamma_a d\sigma = \int \frac{\gamma_b d\sigma}{r} : \int \gamma_b d\sigma.$$

Sind endlich noch die Durchmesser der beiden Löcher klein im Verhältniss zu ihrer Entfernung, so werden die zweiten Integrale in den Gleichungen (3) über die betreffenden Löcher constant und man hat, wie (3) §. 3:

$$\text{constant} = \int \gamma_a \left( \frac{1}{r} + F_{12} \right) d\sigma \text{ u. s. f.}$$

Die Bewegung auf den beiden Löchern findet also in derselben Weise statt, wie wenn nur ein Loch vorhanden wäre.

Um nun die Stärke des Resonanztones zu bestimmen, mache man wieder, wie in §. 4, von der Gleichung:

$$\oint \left( \psi \frac{d\varphi}{dv} - \varphi \frac{d\psi}{dv} \right) d\sigma = 0$$

Gebrauch, wobei man jedoch über zwei Löcher zu integrieren hat, und bestimme die Hülfsfunction  $\psi$  so, dass sie auf dem Loch  $a$  constant wird und überall mit Ausnahme des Loches  $a$  den Differentialcoefficienten  $\frac{d\psi}{dv} = \text{Null}$  gibt. Man hat alsdann, wenn man für  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  die Werthe substituirt, welche oben in Gleichung (1) und (2) gegeben sind:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_a \left( 2\pi \psi_a + \int \frac{d\psi_a}{d\nu} d\sigma \int \frac{\gamma_a d\sigma}{r} : \int \gamma_a d\sigma \right) + S_a \kappa \int \frac{d\psi_a}{d\nu} d\sigma \\ \quad + 2\pi \psi_b C_b = - \frac{2H}{\kappa} \int \frac{d\psi_a}{d\nu} d\sigma, \\ - C_a \kappa \int \frac{d\psi_a}{d\nu} d\sigma + S_a \left( 2\pi \psi_a + \int \frac{d\psi_a}{d\nu} d\sigma \int \frac{\sigma_a d\sigma}{r} : \int \sigma_a d\sigma \right) + 2\pi \psi_b S_b = \end{array} \right.$$

Auch hier kann man wieder, wie oben in §. 4 Gleichung (3) kürzer schreiben:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_a \beta_a + S_a \alpha_a + 2\pi \psi_b C_b = - \frac{2H\alpha_a}{\kappa^2}, \\ - C_a \alpha_a + S_a \beta_a + 2\pi \psi_b S_b = 0. \end{array} \right.$$

Nun führe man weiter eine Function  $\chi$  ein, welche jedoch so beschaffen ist, dass  $\frac{d\chi}{d\nu}$  überall auf der Oberfläche des Hohlraumes mit Ausnahme des Loches  $b$  gleich Null ist. Man erhält alsdann zwei ganz ähnliche Gleichungen für das Loch  $b$ , welche lauten:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_b \beta_b + S_b \alpha_b + 2\pi \chi_a C_a = 0, \\ - C_b \alpha_b + S_b \beta_b + 2\pi \chi_a S_a = 0, \end{array} \right.$$

Aus den vier Gleichungen (5) und (6) kann man dann die vier unbekannten  $C_a C_b S_a S_b$  aus  $H$  bestimmen. Die Ausdrücke  $\beta$  und  $\alpha$  haben hier ganz genau dieselbe Bedeutung, wie oben in §. 4 Gleichung (3), wie man sich sehr leicht überzeugt, wenn man die Definition der Hilfsfunctionen  $\psi$  und  $\chi$  sich gegenwärtig hält.

Setzt man für den cylindrischen Hohlraum die Coordinate  $z$  beim Loch  $a$  gleich Null, so hat man, wie oben in § 5:  $\psi = \cos \kappa(z + l)$ ; also:

$$\begin{array}{ll} \psi_a = \cos \kappa l, & \frac{d\psi_a}{d\nu} = -\kappa \sin \kappa l, \\ \psi_b = 1, & \frac{d\psi_b}{d\nu} = 0. \end{array}$$

Ferner hat man, um den Bedingungen für  $\chi$  zu entsprechen,  $\chi = \cos \kappa z$ , woraus sich ergibt:

$$\chi_b = \cos \alpha l, \quad \frac{d\chi_b}{d\nu} = -\alpha \sin \alpha l.$$

$$\chi_a = 1, \quad \frac{d\chi_a}{d\nu} = 0.$$

Bei der Bestimmung dieser Werthe darf man nicht übersehen, dass das Loch  $b$  in der Entfernung  $-l$  vom Coordinatenanfang liegt und  $\frac{d\chi}{d\nu}$  nach aussen, also hier nach der Richtung der negativen  $z$  gerechnet werden muss.

Setzt man nun in die Gleichungen (4) und (5) die hier angegebenen Werthe der  $\psi$  und  $\chi$  ein und erinnert man sich aus § 5 Gleichung (4), dass:

$$\int d\sigma \int \frac{\gamma d\sigma}{r} : \int \gamma d\sigma = \frac{\pi^2 R}{2}$$

ist, so findet man:

$$\beta_a = \beta_b = 2\pi \cos \alpha l - \frac{\pi^2 R \alpha \sin \alpha l}{2} = \beta,$$

$$\alpha_a = \alpha_b = -\pi R^2 \alpha^2 \sin \alpha l = \alpha,$$

$$\psi_b = \chi_a = 1.$$

Die vier Gleichungen (5) und (6) werden nun:

$$\begin{cases} C_a \beta + S_a \alpha + 2\pi C_b = \frac{-2H\alpha}{\alpha^2}, \\ S_a \beta - C_a \alpha + 2\pi S_b = 0, \\ C_b \beta + S_b \alpha + 2\pi C_a = 0, \\ S_b \beta - C_b \alpha + 2\pi S_a = 0. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$(7) \quad C_a = \frac{C_b \beta + S_b \alpha}{2\pi}, \quad S_a = \frac{S_b \beta - C_a \alpha}{2\pi};$$

und wenn man diese beiden Ausdrücke in die beiden ersten Gleichungen einsetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} C_b(\beta^2 - \alpha^2 - 4\pi^2) + 2\alpha\beta S_b &= \frac{-4\pi\alpha H}{\alpha^2} \\ -2\alpha\beta C_b + S_b(\beta^2 - \alpha^2 - 4\pi^2) &= 0. \end{aligned}$$

Quadriert man nun beide Gleichungen und addirt, so hat man:

$$\alpha^2 (C_b^2 + S_b^2) = \frac{16\pi^2 \alpha^2 H^2}{\alpha^2 [(\beta^2 - \alpha^2 - 4\pi^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2]}.$$

Dieser Ausdruck wird sehr gross, wenn  $\beta^2 - \alpha^2 - 4\pi^2 = 0$  ist, woraus man für die Wellenlänge des Tones, den eine an beiden Enden offene cylindrische Röhre hören lässt, die Gleichung:

$$(8) \quad \beta = \pm 2\pi$$

erhält; denn  $\alpha^2$  verschwindet gegen  $4\pi^2$ . Setzt man für  $\beta$  diesen Werth, so hat man:  $C_b^2 + S_b^2 = H^2 : \pi^2$ . Ferner hat man aus Gleichung (7):

$$C_a^2 + S_a^2 = \frac{(C_b^2 + S_b^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{4\pi^2}.$$

Ist die Wellenlänge des wiedererklingenden Tones die Wellenlänge des Tones, den der Hohlraum angeblasen hören lässt, so hat man  $C_b^2 + S_b^2 = C_a^2 + S_a^2$ , d. h. beide Löcher lassen den Ton in gleicher Stärke erklingen.

Die Gleichung (8) für die Wellenlänge des Tones, welchen die cylindrische an beiden Enden offene Röhre hören lässt, wird, wenn man das  $\beta$  aus Gleichung (3) einsetzt und zugleich sich daran erinnert, dass dieses  $\beta$  dasselbe ist, wie bei der Röhre mit einer Oeffnung in §. 4:

$$(9) \quad \cos \pi l - \frac{\pi \sin \pi l}{2\pi} \int d\sigma \int \frac{\gamma d\sigma}{r} : \int \gamma d\sigma = \pm 1.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\vartheta = \frac{1}{2\pi l} \int d\sigma \int \frac{\gamma d\sigma}{r} : \int \gamma d\sigma,$$

so hat man für den tiefsten Ton:

$$\cos \pi l - \vartheta \pi l \sin \pi l + 1 = 0, \text{ oder:}$$

$$\cos^2 \frac{\pi l}{2} - \vartheta \frac{\pi l}{2} \sin \frac{\pi l}{2} \cos \frac{\pi l}{2} = 0, \text{ oder:}$$

$$(10) \quad \cotg \frac{\pi l}{2} - \vartheta \pi l = 0.$$

Ist  $\vartheta \pi l$  ein kleiner Bruch, so hat man annähernd:

$$\pi l = \frac{\pi}{1 + 2\vartheta}.$$

Für die Pfeife mit einem Loch hatten wir  $\beta = 0$  oder:

$$\cotg \pi l = \vartheta \pi l, \text{ und hieraus:}$$

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} - \vartheta \alpha l \text{ oder } \alpha l = \frac{\pi}{2(1+\vartheta)}.$$

Die Töne, welche eine cylindrische Pfeife hören lässt, wenn sie an einem Ende oder an beiden Enden offen ist, liegen also keine ganze Octave aus einander. Ihre Schwingungszahlen verhalten sich wie die betreffenden Werthe von  $\alpha$ , d. i. wie:

$$(11) \quad 1 + 2\vartheta : 2 + 2\vartheta.$$

Setzt man für  $\vartheta$  den Minimalwerth aus Gleichung (5) §. 5, so hat man für dieses Verhältniss:

$$(12) \quad (2l + \pi R) : (4l + \pi R).$$

Setzt man dagegen für  $\vartheta$  den Maximalwerth aus Gleichung (4) §. 5, so hat man:

$$(13) \quad (3\pi l + 16R) : (6\pi l + 16R).$$

Hierbei bedeutet wieder  $l$  die Länge der Röhre,  $R$  den Radius des Querschnittes.

#### §. 9. Cubische Pfeife mit zwei Löchern.

Für den cubischen Hohlraum mit zwei Löchern findet man leicht aus §. 7 Gleichung (6) und §. 8 Gleichung (4) und (5):

$$\beta_a = 2\pi\psi_m \left[ 1 - \frac{\alpha^2 V}{2R_a} + \frac{\alpha^2 V}{4r_\mu} \right]; \alpha_a = -\alpha^3 V\psi_m.$$

$\psi_b$  kann man nach den Erörterungen des §. 6 bis auf einen kleinen Fehler gleich  $\psi_m$  setzen, da  $\psi$  innerhalb des Hohlraumes sehr nahe constant ist. Den Ausdruck für  $\beta_a$  kann man noch übersichtlicher gestalten. Es gibt nämlich  $\beta_a = 0$  nach §. 6 Gleichung (6) den Werth für  $\alpha$ , welcher dem angeblasenen Tone des Loches  $a$  entspricht. Nennt man  $\alpha_a$  diesen Werth von  $\alpha$ , so hat man:

$$\beta_a = 2\pi\psi_m \left( 1 - \frac{\alpha_a^2}{\alpha_a^2} \right).$$

Dieselben Bemerkungen gelten für das Loch  $b$ . Setzt man nun die soeben gefundenen Werthe in die beiden

Gleichungen (5) und (6) des vorigen Paragraphen ein und dividirt beide mit  $2\pi\psi_m$  und  $2\pi\chi_m$ , so erhält man:

$$(1) \quad \begin{cases} C_a \left(1 - \frac{x^2}{x_a^2}\right) + S_a \frac{x^3 V}{2\pi} + C_b = \frac{x V H}{\pi}, \\ S_a \left(1 - \frac{x^2}{x_a^2}\right) + C_a \frac{x^3 V}{2\pi} + S_b = 0, \\ C_b \left(1 - \frac{x^2}{x_b^2}\right) - S_b \frac{x^3 V}{2\pi} + C_a = 0, \\ S_b \left(1 - \frac{x^2}{x_b^2}\right) + C_b \frac{x^3 V}{2\pi} + S_a = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen  $C_a$  und  $S_a$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} C_b \beta - S_b \alpha &= -\frac{x V H}{\pi}, \\ C_b \alpha + S_b \beta &= 0, \end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(2) \quad \begin{cases} \beta = \left(1 - \frac{x^2}{x_a^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{x_b^2}\right) - \left(\frac{x^3 V}{2\pi}\right)^2 - 1, \\ \alpha = \frac{x^3 V}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x_a^2} + \frac{1}{x_b^2}\right)\right). \end{cases}$$

Endlich hat man:

$$C_b^2 + S_b^2 = \frac{x^2 V^2 H^2}{\pi^2 (\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Nun ist  $\alpha^2$  ein kleiner Bruch, wenn die Durchmesser des Hohlraumes gegen die Wellenlänge sehr klein sind. Es wird daher die Stärke des Resonanztones sehr gross, wenn wir  $\beta = 0$  setzen. Setzen wir  $\beta$  in Gleichung (2) gleich Null, so erhalten wir:

$$0 = - (x_a^2 + x_b^2) + x^2 - \frac{x^4 V^2 x_a^2 x_b^2}{4\pi^2},$$

und da auch hier das letzte Glied gegen die anderen, wie wir sehen werden, sehr klein ist, haben wir schliesslich:

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 = x_a^2 + x_b^2, \text{ oder:} \\ N = \sqrt{N_a^2 + N_b^2} \end{cases}$$

oder in Worten: Das Quadrat der Schwingungszahl des Tones, welchen zwei Löcher eines cubischen Hohlraumes (wie eine Kugel oder ein Würfel) geben, wenn sie beide offen sind, ist gleich der Summe der Quadrate der Schwingungszahlen, welche man erhält, wenn man das eine und dann das andere dieser Löcher schliesst.

Setzt man in die von uns vernachlässigten Werthe ein:

$$\alpha_a^2 = \frac{2R_a}{V}, \quad \alpha_b^2 = \frac{2R_b}{V}, \quad \alpha^2 = \frac{2(R_a + R_b)}{V}$$

nach §. 6 Gleichung (6) und (3) oben, so überzeugt man sich, dass in der That die Vernachlässigungen erlaubt sind, durch welche wir zu der Gleichung (3) gekommen sind.

Es bleibt nun noch übrig, den Fehler annähernd zu schätzen, welchen wir dadurch begehen, dass wir in den Gleichungen (5) und (6) §. 8  $\psi_b = \psi_m$ ,  $\alpha_b = \alpha_m$  setzen.

Nach der in §. 6 angestellten Betrachtung haben wir:

$$\frac{d\psi}{ds} = - \frac{\alpha^2 V' \beta \psi_m}{F},$$

(vgl. Figur p. 128). Hierbei bedeutet  $V'$  den Raum von der Fläche  $F$  bis zum Hintergrund und  $\beta$  einen echten Bruch; denn es ist klar, dass  $\frac{d\psi}{ds}$  am Rande kleiner sein muss, als der mittlere Werth von  $\frac{d\psi}{dv}$  auf der Fläche  $F$ , weil ja die Bewegung der Luft am Rande am langsamsten ist. Durch Integration vom Punkte  $m$  bis zum Punkte  $b$  hat man:

$$\psi_m - \psi_b = - \frac{\alpha^2 \beta \psi_m S V'_\mu}{F_\mu}.$$

Hier bedeutet  $S$  die Strecke der Randcurve von  $m$  bis  $b$ ,  $V'_\mu$  einen mittleren Werth aller Volumina von  $m$  an und ebenso  $F_\mu$  einen solchen Mittelwerth. Setzt man, um eine mögliche Annahme zu machen:  $V'_\mu = V:2$ ,  $F_\mu = S r_\mu$ , so hat man:

$$\psi_b = \psi_m \left( 1 + \frac{\alpha^2 \beta V'}{2 r_\mu} \right), \quad \alpha_a = \alpha_m \left( 1 + \frac{\alpha^2 \beta V'}{2 r_\mu} \right).$$

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen §. 8 (5) und (6) ein, und setzt man  $\frac{x^3 V}{2\pi} = 0$ , da dies zulässig ist, wie wir soeben gesehen haben, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{cases} C_a \left(1 - \frac{x^2}{x_a^2}\right) + C_b \left(1 + \frac{x^2 \beta V}{2r_\mu}\right) = \frac{x V H}{\pi}, \\ S_a \left(1 - \frac{x^2}{x_a^2}\right) + S_b \left(1 + \frac{x^2 \beta V}{2r_\mu}\right) = 0, \\ C_a \left(1 - \frac{x^2}{x_b^2}\right) + C_a \left(1 + \frac{x^2 \beta V}{2r_\mu}\right) = 0, \\ S_b \left(1 - \frac{x^2}{x_b^2}\right) + S_a \left(1 + \frac{x^2 \beta V}{2r_\mu}\right) = 0. \end{cases}$$

Aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen findet man nun:

$$\left(1 - \frac{x^2}{x_a^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{x_b^2}\right) - \left(1 + \frac{x^2 \beta V}{2r_\mu}\right)^2 = 0$$

und hieraus:

$$(4) \quad x^2 = (x_a^2 + x_b^2) \left[ 1 + \frac{2\beta R_a R_b}{r_\mu (R_a + R_b)} \right].$$

Der Ton, welchen ein Hohlraum hören lässt, wenn zwei Löcher offen sind, ist also immer etwas höher, als der aus Gleichung (3) folgende. Der Ton, welchen ein Hohlraum mit zwei gleichen Löchern hören lässt, ist um etwas höher, als die verminderte Quint des Tones, welchen ein einziges dieser Löcher gibt.

#### §. 10. Versuche.

Hr. Sondhauss hat in der oben erwähnten Arbeit für die Töne cubischer Pfeifen die empirische Formel gefunden:

$$N = 52,4 \text{ m} \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{V}},$$

wobei  $S$  die Oberfläche des Loches,  $V$  das Volumen des Hohlraumes der cubischen Pfeife bedeutet. Die Formel des Hrn. Helmholtz gibt:



$$N = 56,174 \text{ m} \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{V}},$$

also einen weit höheren Ton. Der bedeutende Unterschied zwischen beiden Formeln hat, wie bereits oben in §. 7 bemerkt wurde, darin seinen Grund, dass die von Hrn. Sondhauss benutzten Pfeifen meistens dicke Wandungen hatten und daher als cubische Pfeifen mit cylindrischem Ansatz (§. 7 oben) anzusehen waren. Es ist übrigens auch schon Hrn. Sondhauss aufgefallen, dass Pfeifen mit dicken Wandungen unter übrigens gleichen Umständen tiefere Töne gaben.

Um die theoretischen Resultate möglichst genau zu prüfen, wurde als cubische Pfeife eine cylindrische Blechbüchse mit durchbohrtem Deckel gewählt und wurden dann, um zunächst den Einfluss der Grösse des Loches zu prüfen, nach und nach verschiedene Deckel auf die Blechbüchse aufgesetzt. Die Oeffnungen waren alle kreisrund und mit dem Radius  $R$ . Die erhaltenen Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

No.	Volumen $V$ in ccm.	Durchmesser $2R$ in cm.	$N$ berechnet.	$N$ gefunden.
1	530	2,2	339	343
2	530	1,75	303	315
3	530	2,45	358	359
4	530	3,075	401	403

Die Resultate sind berechnet nach der Formel des Hrn. Helmholtz:

$$N = 5294 \text{ cm} \sqrt{\frac{2R}{V}}.$$

Es gibt also die Helmholtz'sche Formel sehr genaue, aber durchschnittlich etwas zu kleine Resultate. Bringt man an der Helmholtz'schen Formel die aus unseren Untersuchungen hervorgehende Correctur an, (§. 6 Gleichung (7)) und berücksichtigt man weiter, dass die Versuche nicht bei  $0^\circ$ , sondern bei etwa  $17^\circ$  Temperatur vorgenommen

worden sind, so werden die theoretischen Resultate etwas grösser, als die durch Versuche gefundenen.

Diese, sowie die übrigen in gegenwärtigem Aufsatze angeführten Versuche stützen sich auf eine Reihe vorzüglicher Stimmgabeln, welche von dem bekannten Akustiker Appunn in Hanau höchst genau gestimmt geliefert wurden und die diatonische Tonleiter bilden; der Grundton  $\bar{c}$  dieser Reihe hat die Schwingungszahl 256. Auf ihn war bei den Versuchen obiger Tabelle die Stahlsaite eines Monochords gestimmt. Die Saitenlänge des mit dem Tone der Pfeife consonirenden Tones ward bis auf  $\frac{1}{2}$  mm genau gemessen und aus dieser Dimension sowie aus der Länge der Monochordsaite die absolute Schwingungszahl des betreffenden Tones durch eine einfache Rechnung ermittelt.

Die Töne der Pfeifen sind verschieden je nach der Stärke des Anblasens. Es wurde nun durchweg entsprechend den theoretischen Voraussetzungen, unter welchen die Formeln abgeleitet wurden, der durch das schwächste Anblasen erhaltene Ton gewählt. Sehr gut gelingt dies mittelst eines Kautschukschlauches, welchen man vorn etwas zusammenpresst und so vor den Rand der Oeffnung setzt, dass der austretende Luftstrom den Rand unter einem Winkel von etwa  $45^\circ$  schneidet. Der hierdurch beim schwachen Anblasen hervorgebrachte Ton ist durchaus rein und genau bestimmbar.

Die Abhängigkeit der Schwingungszahl einer cubischen Pfeife von ihrem Volumen ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Ein und derselbe centrisch mit einer kreisförmigen Oeffnung versehene Blechdeckel wurde auf ein Glasgefäss gekittet, während durch Eingiessen von Wasser die in der Tabelle angegebenen Volumina hergestellt wurden:

No.	$2R$ in cm.	$V$ in cm.	$N$ gefunden.	$N$ berechnet.
1	1,75	400	361	355
2	1,75	300	415	410
3	1,75	200	523	502

Auch hier sind wieder die berechneten Zahlen kleiner als die gefundenen.

Für cubische Pfeifen mit kurzen cylindrischen Ansatzröhren gilt nach §. 7 Gleichung (5), wenn man das unbestimmte Glied mit  $r_\mu$  weglässt, die Formel:

$$N = 52,94 \text{ m} \sqrt{\frac{2R}{V \left(1 + \frac{2l}{\pi R}\right)}},$$

wobei  $l$  die Länge des cylindrischen Ansatzes bedeutet. Um diese Formel zu prüfen, wurden zwei Flaschen angewendet, deren Volumen durch Eingiessen von Wasser verändert wurde. Die Versuche sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

No.	$V$ in ccm.	$2R$ in cm.	$l$ in cm.	$N$ berechnet.	$N$ gefunden.
1	1288	2,35	3,8	129	128
2	1000	2,35	3,8	146	153
3	500	2,35	3,8	207	213
4	596	2,35	3,1	171	171
5	500	2,35	3,1	186	192

Abermals sind die berechneten Zahlen kleiner als die gefundenen.

Eine andere Reihe von Versuchen mit längeren Ansatzröhren ergab folgende Resultate:

No.	$V$ in ccm.	$2R$ in cm.	$l$ in cm.	$N$ berechnet.	$N$ gefunden.
1	757	2,3	9,4	117	130
2	266	1,9	6,8	190	202
3	190	1,7	6,0	211	227
4	145	1,9	6,0	270	278

Zu diesen Versuchen wurden Kochflaschen benutzt, wie sie in chemischen Laboratorien Verwendung finden und bei der Auswahl darauf gesehen, dass der Hohlraum sich direct an den etwas langen Hals anschloss.

Die Formel §. 9 Gleichung (3) für cubische Pfeifen mit zwei Löchern:

$$(1) \quad N^2 = N_a^2 + N_b^2$$

hat schon Hr. Sondhauss auf empirischem Wege gefunden. Die folgende Tabelle gibt eine nochmalige Prüfung, zugleich aber auch eine Bestätigung der genaueren approximativen Formel §. 9 Gleichung (4):

$$(2) \quad N^2 = (N_a^2 + N_b^2) \left[ 1 + \frac{2\beta R_a R_b}{r_\mu (R_a + R_b)} \right].$$

Bei Anwendung dieser Formel wurde  $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $r_\mu = 8$  cm gesetzt, entsprechend den Dimensionen der Pfeife.

No.	Nur eine Oeffnung frei:				Beide Oeffnungen frei:		
	$2R_a$	$2R_b$	$N_a$ gefunden.	$N_b$ gefunden.	$N$ gefunden.	$N$ berechnet aus (1).	$N$ berechnet aus (2).
1	2,2	—	343	—	—	—	—
2	—	1,75	—	315	479	466	480
3	—	2,45	—	359	507	497	512
4	—	3,075	—	403	545	530	551

Für offene cylindrische Pfeifen hatten wir oben in §. 5 Gleichung (6) die Formel gefunden:

$$N = \frac{8306 \text{ cm}}{l \left( 1 + \frac{\pi R}{4l} \right)},$$

wobei  $l$  die Länge der Pfeife,  $R$  den Radius ihrer kreisförmigen Oeffnung bedeutet. Angestellte Versuche ergaben folgendes:

No.	$l$ in cm.	$2R$ in cm.	$N$ gefunden.	$N$ berechnet.
1	6,3	1,6	1150	1199
2	12,6	1,8	626	624
3	15,4	2,4	505	508
4	60,0	2,3	139	136
5	67,0	5,2	127	120

Endlich ergaben einige zur Prüfung der Formel §. 8 Gleichung (12):

$$N_o : N_g = \frac{4l + \pi R}{2l + \pi R}$$

angestellten Versuche:

No.	$N_o : N_g$ gefunden:	$N_o : N_g$ berechnet:
1	1,852	1,834
2	1,954	1,899
3	1,923	1,890
4	1,994	1,967
5	1,993	1,942.

Hierbei bedeutet  $N_o$  die Schwingungszahl des Tones, welchen eine cylindrische, an beiden Enden offene Pfeife gibt,  $N_g$  die Schwingungszahl des Tones, welchen dieselbe Pfeife hören lässt, wenn sie an einem Ende geschlossen wird.

Speyer im Dezember 1877.

## VII. Ueber ein zu Geschwindigkeitsmessungen an Luftströmen geeignetes Instrument (Anemometer); von G. Recknagel.

I. Die folgende Abhandlung betrifft ein Instrument, welches zur Messung der mittleren Geschwindigkeit von Luftströmen dienen soll, deren Richtung constant ist.

Man verwendet zu diesem Zwecke Flügelräder, welche nach dem Princip der Windmühle construirt sind. Die Axe des Rades wird in die Richtung des Luftstromes gestellt, dessen Geschwindigkeit gemessen werden soll. Die Normale der Flügel bildet mit der Windrichtung

irgend einen kleineren oder grösseren Winkel, welcher auf die einer gewissen Windgeschwindigkeit entsprechende Rotationsgeschwindigkeit des Rades von wesentlichem Einfluss ist.

Einigen geschichtlichen Notizen über das Flügel-Anemometer sollen die Anforderungen, welche man an dasselbe zu stellen hat, vorausgeschickt werden.

1. Es genügt nicht, dass der Zusammenhang seiner Rotationsgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit des Windes überhaupt bekannt sei, sondern durch die Aufgabe, dass das Anemometer zur Messung mittlerer Geschwindigkeiten taugte, wird überdies die Forderung hereingebracht, dass jener Zusammenhang mittelst einer linearen Gleichung statfinde.

Der Beweis dieser Behauptung soll hier gegeben werden, weil er vielleicht dem Satze selbst zu grösserer Verbreitung verhilft.

Es sei zur Darstellung der Windgeschwindigkeit ( $v$ ) für den Fall, dass dieselbe während jedes einzelnen Versuches constant ist, in verschiedenen Versuchen aber verschiedene Werthe hat, die nach Potenzen von  $n$  fortschreitende Reihe:

$$v = a + bn + cn^2 + \dots$$

nöthig, und zwar soll für ein gewisses Intervall der Werthe von  $v$  und eine gewisse Genauigkeit die Reihe auf die angegebenen drei Glieder beschränkt werden dürfen.

Ist nun in einem besonderen Falle das Instrument  $t$  Secunden hindurch einem Luftstrome ausgesetzt, welcher  $t_1$  Secunden lang die constante Geschwindigkeit  $v_1$ , in den folgenden  $t_2$  Secunden die constante Geschwindigkeit  $v_2$  hat, und macht das Instrument in den  $t$  Secunden  $N$  Umdrehungen, welche sich aus  $N_1$  in der Zeit  $t_1$  und aus  $N_2$  in der Zeit  $t_2$  gemachten Umdrehungen summiren, so sind wir, da wir  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  nicht kennen, sondern schliesslich nur  $N$  und  $t$  erfahren haben, darauf angewiesen, die

mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$ , welche den Werth  $\frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}$  hat, aus unserer Gleichung:

$$v = a + b \left( \frac{N}{t} \right) + c \left( \frac{N}{t} \right)^2$$

zu berechnen.

Diese Rechnung gibt aber ein fehlerhaftes Resultat. Denn es ist der Annahme nach richtig:

$$v_1 = a + b \left( \frac{N_1}{t_1} \right) + c \left( \frac{N_1}{t_1} \right)^2, \quad v_2 = a + b \left( \frac{N_2}{t_2} \right) + c \left( \frac{N_2}{t_2} \right)^2,$$

also:

$$\bar{v} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = a + b \left( \frac{N}{t} \right) + c \left( \frac{N_1^2}{t_1} + \frac{N_2^2}{t_2} \right),$$

wie man leicht durch Substitution von  $N$  für  $N_1 + N_2$  und von  $t$  für  $t_1 + t_2$  erhält. Der Unterschied zwischen dem wahren Werthe ( $\bar{v}$ ) der mittleren Geschwindigkeit und dem berechneten ( $v$ ) kann auf die Form gebracht werden:

$$\bar{v} - v = c \cdot \frac{t_1 t_2}{t^2} \left( \frac{N_1}{t_1} - \frac{N_2}{t_2} \right)^2,$$

woraus sich die Richtigkeit der obigen Behauptung ergibt. Denn der Fehler verschwindet nur, wenn  $c$  Null oder die Geschwindigkeit constant ist  $\left( \frac{N_1}{t_1} = \frac{N_2}{t_2} \right)$ . Ausserdem ist der Fehler um so grösser, je grösser die Schwankung der Geschwindigkeit ist, da mit dieser die Differenz der Umdrehungszahlen  $\frac{N_1}{t_1}$  und  $\frac{N_2}{t_2}$  wächst.

2. Da die Windgeschwindigkeiten sich nicht plötzlich, sondern stetig ändern, die Aenderung der Rotationsgeschwindigkeit aber sich zur Aenderung der Windgeschwindigkeit wie die Wirkung zur Ursache verhält, so muss ferner die nach Abzug des Widerstandes übriggebliebene wirksame Kraft im Verhältniss zur Masse des Rades so gross sein, dass selbst bei fortwährend steigender Windgeschwindigkeit das Instrument nicht wesentlich zurückbleibt, und zugleich muss bei abnehmender Geschwindigkeit, die Däm-

pfung hinreichen, ein merkliches Ueberlaufen der vorhandenen Rotationsgeschwindigkeit zu verhindern.

3. Obwohl die Verwendung des Flügel-Anemometers zur Messung von Geschwindigkeiten der freien Atmosphäre nicht ausgeschlossen ist, wenn man nur dafür sorgt, dass es durch die Windfahne dem Winde entgegen-gedreht wird, so wird es doch seine hauptsächlichste Anwendung zu Geschwindigkeitsmessungen in Röhren oder Canälen finden. Dabei müssen wir verlangen, dass wenigstens die mittlere Geschwindigkeit der Strömung durch Einführung des Anemometers nicht merklich geändert werde. Dieser Forderung wird um so mehr genügt, je kleiner die Projection des Instrumentes auf eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene ist. Es muss also jede Verminderung der Dimensionen des Instrumentes, welche seinen übrigen guten Eigenschaften, wie Haltbarkeit, Empfindlichkeit u. s. f. keinen Eintrag thut, als eine Verbesserung angesehen werden. Es bleibt dann immer noch übrig, zu ermitteln, wie sich die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt des Rohres zu der vom Anemometer gemessenen verhält.

II. Geschichtliches. Obwohl die Anwendung von Flügel-Anemometern<sup>1)</sup> bis auf Christian Wolf (1743) zurückgeführt werden kann, und die Construction schon durch Wolfman (1790) grosse Vollkommenheit erreicht hatte, so kann doch den älteren mittelst des Flügel-Anemometers erhaltenen Versuchsergebnissen deshalb wenig Bedeutung beigemessen werden, weil der Zusammenhang zwischen der Windgeschwindigkeit und der Rotationsgeschwindigkeit des Flügelrades nicht durch Versuche erprobt wurde, sondern durch theoretische Speculation ermittelt werden sollte, deren Grundlagen bekanntlich heute noch nicht hinreichend gesichert sind.

Das Verdienst, eine empirische Aichungsmethode erfunden zu haben, gebührt Combes.<sup>2)</sup> Die Construction

1) Nach Gehler, physik. Wörterbuch X. p. 2146 ff.

2) Annales des mines (3) XIII. p. 103. 1838.



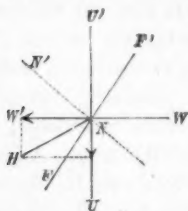
seines Anemometers ist von der des Woltman'schen Flügels nicht wesentlich verschieden. Der Durchmesser des Flügelrades beträgt 7,5 cm, die vier Schaufeln sind von Glimmer, der bei geringem Gewichte grosse Steifigkeit besitzt. Die Axe ist mit einer Schraube ohne Ende versehen, in welche ein erstes Rädchen von 100 Zähnen eingreift, das seine Umdrehungen auf ein zweites, durch einen Sperrkegel gehaltenes, mit Zifferblatt versehenes Rad überträgt. Ausserdem ist eine Hemmung vorgesehen, welche vom Beobachter zu beliebiger Zeit in das Rad eingeschoben oder zurückgezogen werden kann.

Die Aichung seines Anemometers führt Combes in folgender Weise aus: er befestigt das Instrument an dem einen Ende eines drehbaren, ungefähr 1 m langen Armes und schwingt es so gegen ruhende Luft im Kreise herum, in der Voraussetzung, dass es dabei ebenso viel Umdrehungen mache, wie wenn der Wind mit der Peripheriegeschwindigkeit des Radmittelpunktes gegen das ruhende Anemometer wehe. Bei Geschwindigkeiten von 0,287 bis 4,633 m erhält Combes 13 Beobachtungsergebnisse, welche sich recht gut durch eine lineare Formel darstellen lassen, deren Constanten nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme ermittelt sind.

Ausserdem sucht Combes auch durch eine theoretische Betrachtung nachzuweisen, dass die Windgeschwindigkeit mittelst einer linearen Gleichung mit der Rotationsgeschwindigkeit seines Instrumentes zusammenhänge.

Nach seiner Annahme ist der resultirende Druck, welchen die bewegte Schaufel erfährt, so zu berechnen, als ob die Schaufel fest stünde und auf ihrer Rückseite keine Einwirkung erführe, während auf ihrer Vorderseite der Wind mit einer Geschwindigkeit ankommt, welche aus seiner wirklichen und der der Schaufelgeschwindigkeit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit durch Parallelogramm-Construction combinirt wird. Es sei  $FF'$  die

Projection einer Schaufel, wie sie von einem, in der Richtung der Speiche, nach der Nabe  $N$  hin blickenden Auge gesehen wird,  $NN'$  die Normale der Schaufel,  $WW'$  die Richtung des Windes,  $UU'$  die Richtung der Bewegung des Schaufelmittelpunktes. Ist dann  $NW'$  der Windgeschwindigkeit ( $v$ ),  $NU$  der Schaufelgeschwindigkeit ( $u$ ) proportional, so ist durch  $NH$  die von Combes vermeinte „relative Windgeschwindigkeit“ dargestellt.



$NH$  wird dann auf die Normale  $NN'$  projicirt und liefert in dieser Richtung die Componente:  $v \cos \varphi - u \sin \varphi$ .

Dem Quadrate dieser Componente setzt Combes den Druck proportional, welchen der Wind in der Richtung der Normale übt. Ausserdem wird er noch der Fläche  $f$  qm der Schaufeln und der Masse  $\frac{\delta}{g}$  eines Cubikmeters Luft proportional gesetzt, so dass der Normaldruck mit Hinzufügung der (nach Borda gleich  $\frac{1}{2}$  angenommenen) Erfahrungsconstante dargestellt wird durch:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta f}{g} (v \cos \varphi - u \sin \varphi)^2.$$

Um die Wirkung dieses Druckes in der Richtung der Bewegung zu erhalten, ist die vorstehende Grösse mit  $\sin \varphi$  zu multipliciren. Endlich wird das Drehungsmoment dieser Kraft durch Multiplication derselben mit einem Arme  $\rho$  gefunden, der von der Mitte der Axe bis zum Mittelpunkte der Schaufelfläche reicht.

Indem Combes dieses Moment dem Momente  $Rr$  der Reibung gleichsetzt, erhält er die Gleichung:

$$v = u \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{\frac{2 R r g}{\delta f \rho \sin \varphi \cos^2 \varphi}}.$$

Da  $u$  mit der Anzahl ( $n$ ) der in der Secunde gemachten Umdrehungen in der Beziehung  $u = 2 \rho \pi n$  steht, so

ist  $v$  von der Form  $a + bn$ , und die wichtigste ( $b$ ) der beiden Constanten könnte demnach leicht durch Rechnung aus den Dimensionen des Instrumentes und dem Winkel  $\varphi$ , welchen die Schaufelnormale mit der Windrichtung bildet, abgeleitet werden.

Combes leitet aus den oben erwähnten 13 Versuchen für  $b$  den Werth 0,0916 ab, misst  $2 \varphi \pi = 0,16493$  m, berechnet aus diesen beiden Zahlen  $\frac{b}{2 \varphi \pi} = \operatorname{tg} \varphi = 0,5554$ , woraus  $\varphi = 29^{\circ} 3'$  folgt, und bemerkt zu diesem Resultat, dass seine Schaufelnormale in der That nahezu diesen Winkel mit der Richtung der Axe gebildet habe.

Trotz dieser Uebereinstimmung liegt keine Nöthigung vor, der Theorie Combes' beizutreten, da sie von bloß formalen, durch keinen physikalischen Gedanken getragenen Voraussetzungen ausgeht, ja vielmehr die Wirklichkeit, in welcher dem beschleunigenden Drucke des Windes auf die Vorderfläche ausser der Reibung noch der Widerstand der Luft gegen die Rückseite der bewegten Schaufeln entgegenwirkt, von vornherein zu Gunsten einer Fiction aufgibt.

Nach Combes ist meines Wissens nur noch einmal über das Flügel-Anemometer verhandelt worden, und zwar von Morin gelegentlich einer Arbeit über die Lüftung eines Saales im Conservatoire des arts et des métiers, welche er 1855 der Pariser Akademie vorlegte. Er hatte dem Mechaniker B. Bianchi die Ansprüche, welchen ein von letzterem anzufertigendes Anemometer genügen sollte, in folgender Weise formulirt:

1. Das Instrument sollte benützt werden können, Geschwindigkeiten der Luft zwischen 0,40 oder 0,50 m bis zu 30 oder 40 m zu messen;
2. das mit Zeigern „à pointage“ versehene Zählwerk sollte auch bei den höchsten Geschwindigkeiten nicht vor 15 bis 30 Minuten ablaufen;
3. das Instrument sollte hinreichend klein sein, um in die Ventilationscanäle eingeführt zu werden und müsste in jede beliebige Richtung gebracht werden können.

Ueber die Ausführung erfahren wir zunächst, dass sie Morin's Ansprüchen genügt hat. Ausserdem geht aus der etwas aphoristischen Beschreibung hervor, dass statt der Combes'schen Hemmung eine Vorrichtung, das Zählwerk in das laufende Rad einzuschalten, angebracht war. Geschieht diese Einschaltung ohne Störung, was ich für zufällig halte, so gewinnt man allerdings die Umdrehungen, welche bei Combes verloren gehen, während das eben erst ausgelöste Flügelrad sich der Windgeschwindigkeit anpasst; aber dieser Gewinn ist für bedeutungslos zu halten, so lange die Zeitmessung den grossen Fehlern ausgesetzt bleibt, welche bei willkürlicher Bestimmung des Anfangs und Endes der Beobachtungszeit durch zwei verschiedene mechanische Manipulationen begangen werden. Beide Fehlerquellen verlieren übrigens ihren Einfluss um so mehr, je länger die Beobachtung fortgesetzt wird, und dürfen mit Rücksicht auf die überhaupt erreichbare Genauigkeit als eliminirt gelten, wenn die Beobachtungszeit 3—4 Minuten beträgt.

Demnach, und insbesondere nach der leidigen Erfahrung, dass mir mancher Versuch bei geringer Windgeschwindigkeit dadurch missglückt ist, dass durch Einschaltung des Zählwerks das Flügelrad gehemmt wurde, kann ich diese Neuerung nicht für eine wesentliche Verbesserung halten.

Bei der Prüfung, welcher der Civilingenieur V. Chéronnet das Instrument Bianchi's auf einem Combes'schen Rotationsapparat von 4 m Radius unterzog, ergab sich, dass bei Geschwindigkeiten zwischen 1,60 und 9,50 m und solchen zwischen 0,90 und 8,50 m die Punkte der Curven, durch welche die Windgeschwindigkeit mit der Umdrehungszahl zusammenhing, „très sensiblement“ auf einer Geraden lagen. Da ein detaillirter Nachweis für diese Behauptung nicht erbracht ist, so kann ihre Tragweite hier nicht hinreichend gewürdigt werden.

Die Instrumente, welche Neumann in Paris als Anémomètres de Combes verkauft, haben die Dimensionen

des v  
mir u  
male  
Com  
den.  
mit e  
selbst  
ist ei  
werk

I  
Kens  
Anem  
tragu  
der F  
liche  
ersten

met  
welch  
mann  
Form  
mit I  
appar  
stante  
neuen  
sionen  
Siem  
ber s  
in we  
zurüc

1)  
Tiefe  
zwei e  
zweier  
wie au  
Mitwir

des von Combes construirten; hingegen ist in den von mir untersuchten der Winkel  $\varphi$ , welchen die Schaufelnormale mit der Axe bildet, noch erheblich kleiner als ihn Combes angibt und schwankt zwischen 19 und 21 Graden. Das Schaufelrad ist (wahrscheinlich zum Schutze) mit einem Ring umgeben, der gerade noch den Schaufeln selbst Raum zur Bewegung lässt, und statt der Hemmung ist eine Vorrichtung angebracht, mittelst welcher das Zählwerk eingeschaltet und ausgelöst werden kann.

Die Ausstellung wissenschaftlicher Instrumente in Kensington hat gezeigt, dass andere Mechaniker die Flügel-Anemometer verbessert haben, indem sie statt der Uebertragung durch Sperrkegel durchaus den stetigen Eingriff der Räder des Zählwerks anwenden und so die Empfindlichkeit des Instrumentes von der zufälligen Stellung des ersten Rades unabhängig machen.

III. Prüfung des Neumann'schen Anemometers. Als ich durch einige Unwahrscheinlichkeiten, welche sich nach der beigegebenen Formel eines Neumann'schen Anemometers berechneten, zur Prüfung dieser Formel veranlasst wurde, erhielt ich zunächst durch einen mit Hülfe einer Bohrmaschine improvisirten Rotationsapparat von 1 m Radius so abweichende Werthe der Constanten, dass ich, auch diesen Resultaten misstrauend, einen neuen Rotationsapparat<sup>1)</sup> von doppelt so grossen Dimensionen (2 m Radius) anfertigen liess, der mit einem von Siemens und Halske bezogenen doppelten Reliefschreiber so in Verbindung gesetzt wurde, dass sowohl die Zeit, in welcher das Anemometer einen Weg von je  $\pi$  Meter zurücklegte, als auch die Zeit, innerhalb deren es 5000

1) Der Apparat war in einem Zimmer von 10 m Länge und 7 m Tiefe so aufgestellt, dass das Ende des Armes bei der Drehung an zwei eine Fensternische begrenzende Mauerecken und an die Ecken zweier Schränke ziemlich nahe herankam. Diese Vorsprünge scheinen, wie aus dem Späteren hervorgeht, die Ausbildung eines ausgiebigen Mitwindes gestört zu haben.

Umdrehungen machte, auf dem laufenden Papierstreifen durch Stiche begrenzt wurde. Ausserdem bekam der Streifen zur Controle seiner Geschwindigkeit nach Verlauf von je  $\frac{3}{4}$  Secunden einen Stich durch ein stromschliessendes Pendel. Die Geschwindigkeit des Streifens betrug ca. 15 mm in der Secunde.

Mit diesem Apparat erhielt ich nahe das gleiche Resultat wie vorher, nämlich folgende zusammengehörige Werthe der Geschwindigkeit ( $v$ ) und Umdrehungszahl ( $n$ ) des erwähnten Neumann'schen Anemometers.

Beobachtet.		Berechnet.	Fehler in Metern.
$n$	( $v$ )	$v$	
4,36	0,52	0,64	+ 0,12
16,92	1,40	1,96	+ 0,56
55,34	4,03	5,99	+ 1,96

Die Rechnung ist mit der dem Instrumente beigegebenen Formel:

$$v = 0,18086 + 0,10506 n$$

ausgeführt. Sie gibt alle Geschwindigkeiten soviel zu gross, dass sie trotz ihrer zahlreichen Decimalstellen doch nicht als Resultat einer gründlichen Untersuchung gelten könnte<sup>1)</sup>.

In der Absicht, den Bezirk zu ermitteln, innerhalb dessen eine lineare Formel genügt, die Geschwindigkeit aus den Angaben der Neumann'schen Anemometerconstruction zu berechnen, wurde die in München angefertigte Copie eines solchen Instrumentes einer eingehenden Prüfung unterzogen, welche folgendes Resultat ergab:

1) Vgl. Gropius und Schmieden in Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 25, 1875.

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec.
1	1,9
2	4,7
3	8,7
4	15,3
5	25,3

$v=0$ ,  
quadr  
lichen

Const  
Com  
von  
den U  
man  
bew  
höhe  
Wer

Erkl  
kann  
solch  
die z  
im w  
ten,  
Curv  
wind

Mein  
richt  
zu v  
zu s

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung- in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler in cm.
1	1,98	0,33	0,33	0
2	4,78	0,51	0,53	+ 2
3	8,70	0,81	0,83	+ 2
4	15,90	1,38	1,36	- 2
5	25,40	2,09	2,06	- 3

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung- in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler in cm.
6	52,30	4,02	4,04	+ 2
7	81,05	6,00	6,16	+ 16
8	103,5	7,46	7,82	+ 36
9	128,2	9,01	9,64	+ 63
10	157,7	10,70	11,81	+ 111

Aus den ersten 6 Beobachtungen wurde die Formel  $v=0,184+0,07377n$  nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme abgeleitet und dann zur Berechnung sämtlicher Beobachtungen verwendet.

Vorstehende Untersuchung führt für die Neumann'sche Construction einerseits zu dem gleichen Resultate, zu welchem Combes gelangte, nämlich dass innerhalb des Intervalls von  $\frac{1}{2}$  bis 4 m zur Berechnung der Geschwindigkeiten aus den Umdrehungszahlen eine lineare Formel hinreicht, wenn man Fehler von 2 bis 3 cm nicht achtet. Andererseits beweist sie, dass dieselbe Formel bei Berechnung höherer Geschwindigkeiten erheblich grössere Werthe gibt, als die Beobachtung.

Dabei bemerkt man leicht, dass der Mitwind zur Erklärung dieser Abweichung nicht herbeigezogen werden kann, da derselbe, wenn er Beobachtungsfehler verschuldet, solche von entgegengesetztem Vorzeichen hervorruft. Auch die zwischen  $\frac{1}{2}$  und 4 m hervortretenden Abweichungen sind im wesentlichen nicht als Beobachtungsfehler zu betrachten, sondern als charakteristische Merkmale der wahren Curve, welche sich um die Gerade  $v = a + bn$  herumwindet.

IV. Versuche mit einer neuen Construction. Meine eigenen Bemühungen waren zunächst darauf gerichtet, die Dimensionen des Combes'schen Anemometers zu vermindern, ohne die Vorzüge, welche es schon besitzt, zu schmälern. Dabei haben sich indessen sehr beachtens-



werthe Resultate hinsichtlich des Einflusses der Flügelstellung ergeben, welche zu weiteren wesentlichen Verbesserungen führen.

Die zu den Versuchen verwendeten Instrumente haben die Gestalt, welche Taf. I Fig. 5 in natürlicher Grösse zeigt. Jeder der 4 Flügel, welche aus Glimmer bestehen, hat 10 mm Länge in der Richtung des Radius und 15 mm Breite. Die Schwerpunkte der Rechtecke sind 15 mm von der Drehungsaxe entfernt. Das Zählwerk ist in der Weise eingeschaltet, dass in die endlose Schraube *s* ein mit 50 Zähnen versehenes horizontales Rädchen von 10 mm Durchmesser eingreift, welches die Bewegung durch einen unter der Deckplatte laufenden Siebener-Trieb auf ein grösseres Rad von 140 Zähnen überträgt. Auf der Axe des letzteren Rades sitzt der Zeiger, welcher demnach bei 1000 Umdrehungen des Flügelrades einmal über das Zifferblatt läuft.

Damit der Beginn und das Ende von 1000 Umdrehungen durch Schliessung eines galvanischen Stromes angezeigt werden könne, ist bei 5 ein Näpfchen von Ebonit in das Zifferblatt eingelassen, welches so construirt ist, dass der Quecksilbertropfen, den es enthält, bei keiner Stellung des Instruments herausfällt, wohl aber bei jeder Umdrehung einmal von einem am Zeiger angebrachten Stift berührt wird. Der beschriebene Contact schliesst eine Stromleitung, welche in die Klemmen *c, d* eingeführt ist. Da dieses ohne merkliche Hemmung des Zählwerks geschieht, ist die Möglichkeit der Registrirung grösserer Beobachtungsreihen gegeben.

Die Versuche sind mittelst des oben beschriebenen Rotationsapparates in der Weise ausgeführt, dass bei den kleinsten Geschwindigkeiten von 0,25 bis 0,50 m nur derjenige Zeitpunkt galvanisch registrirt wurde, in welchem der Zeiger zum ersten Mal die Quecksilberkuppe berührte. Nach Zurücklegung eines Weges, der wohl nie weniger als 60 m betrug, wurde der Arm angehalten und die Anzahl der vom Flügelrade gemachten Umdrehungen auf dem Zifferblatt abgelesen. Bei den mittleren und grösseren

Gesch  
Zeiger  
gerade  
suchs  
worden  
der L  
trächt

V  
welche  
mit de  
die W  
bis ein  
bereit  
digkei  
Gesch  
Umdr

2  
tion  
0,30 m  
ungen  
Gesch  
Stellu

I  
weiter  
Emp  
einer  
Anwe  
3

stellu  
0,25  
mann  
Sperr  
suchs  
(S. T

I  
fahre  
Anem  
Ann.



Geschwindigkeiten hingegen wurde fortgedreht, bis der Zeiger zum zweiten Mal den Strom schloss und somit gerade 1000 Umdrehungen vollendet waren. Jede Versuchsreihe ist in zwei Stunden vollständig durchgeführt worden, damit nicht Aenderungen in der Dichtigkeit der Luft die Zusammengehörigkeit der Resultate beeinträchtigten.

Versuchsergebnisse. 1. Als bei einem Instrumente, welches mit Nr. 1 bezeichnet werden mag, die Flügelnormale mit der Axe den kleinen Winkel ( $\varphi$ ) von  $11^\circ$  bildete, musste die Windgeschwindigkeit auf ca. 40 cm gesteigert werden, bis eine Reaction des Instrumentes erfolgte, es machte aber bereits 4 Umdrehungen in der Secunde, als die Geschwindigkeit 52 cm betrug, und 107 Umdrehungen bei 4,2 m Geschwindigkeit. Bei 9,7 m endlich wuchs die Zahl der Umdrehungen auf 277 an.

2. Als der Winkel ( $\varphi$ )  $20^\circ$  betrug, begann die Rotation des Instruments bei einer Geschwindigkeit von ca. 0,30 m, bei 0,52 cm Geschwindigkeit wurden 7,3 Umdrehungen gemacht, bei 3,9 m über 90, und auch bei hohen Geschwindigkeiten nicht viel weniger als bei der vorigen Stellung.

Beide Flügelstellungen wurden schon deshalb nicht weiter in Betracht gezogen, weil sie eine zu geringe Empfindlichkeit gaben. Uebrigens bieten sie auch einer linearen Gleichung nur sehr beschränkte Bezirke der Anwendbarkeit.

3. Der Winkel  $\varphi$  war  $25^\circ 40'$ . Da bei dieser Flügelstellung das Instrument auf eine Windgeschwindigkeit von 0,25 reagirte — eine Empfindlichkeit, wie sie die Neumann'schen Instrumente zeigen, wenn nicht gerade der Sperrkegel auszulösen ist — wurde eine vollständige Versuchsreihe durchgeführt, welche folgendes Resultat gab. (S. Tabelle p. 162.)

Bei Ausführung der Rechnung wurde dasselbe Verfahren eingehalten, wie bei Prüfung des Combes'schen Anemometers; eine lineare Formel:

## Versuchsreihe B.

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwindig. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
1	1,06	0,26	0,28	+2
2	3,62	0,35	0,40	+5
3	6,61	0,53	0,54	+1
4	12,8	0,85	0,84	-1
5	23,6	1,40	1,35	-5

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
6	38,0	2,08	2,04	-4
7	83,0	4,15	4,18	+3
8	129,1	6,16	6,38	+22
9	168,8	7,86	8,27	+41
10	215,1	9,73	10,48	+75

$$v = 0,23 + 0,04764 n$$

wurde aus den 6 Versuchen 2—7 nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme abgeleitet und dann zur Berechnung sämtlicher Geschwindigkeiten benutzt. Der Erfolg dieser Prüfung war wenig befriedigend, insofern sich in den Fehlern ein ähnlicher Gang ausspricht wie in der Versuchsreihe A, nur theilweise mit noch grösseren Zahlen. Eine Verbesserung konnte offenbar nur von weiterer Vergrößerung des Neigungswinkels erwartet werden.

4. Der Neigungswinkel betrug  $32^{\circ}50'$ .

## Versuchsreihe C.

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
1	1,21	0,26	0,25	-1
2	2,85	0,35	0,35	0
3	5,74	0,52	0,53	+1
4	10,3	0,83	0,82	-1
5	19,2	1,38	1,37	-1
6	30,9	2,11	2,11	0

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
7	57,9	3,87	3,78	+9
8	91,5	5,77	5,87	+10
9	122,4	7,52	7,79	+27
10	158,4	9,56	10,04	+48
11	183,0	10,81	11,57	+76

Die in gleicher Weise wie früher abgeleitete Formel:

$$v = 0,18 + 0,06222 n$$

stellt nun nicht nur die 6 Beobachtungen 2—7 vollkommen befriedigend dar, sondern gibt auch in höheren Ge-

schwindigkeiten geringere Abweichungen als solche bei den früheren Versuchsreihen zu Tage getreten waren.

Durch diesen ersten Erfolg hatte der Gedanke, dass durch weitere Vergrösserung des Neigungswinkels der Bezirk der Geschwindigkeiten, innerhalb dessen die lineare Formel und mithin das Anemometer selbst anwendbar sind, vergrössert werden könnte, so wesentliche Unterstützung gefunden, dass es angezeigt schien, ihn weiter zu verfolgen.

5. Der Winkel  $\varphi$  war  $46^{\circ} 30'$ .

#### Versuchsreihe D.

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
1	0,90	0,27	0,26	-1
2	1,66	0,35	0,33	-2
3	3,82	0,53	0,55	+2
4	6,91	0,83	0,85	+2
5	12,32	1,38	1,38	0
6	19,20	2,08	2,07	-1

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
7	37,52	3,88	3,88	0
8	59,74	6,01	6,07	+ 6
9	70,63	7,05	7,15	+10
10	92,77	9,15	9,34	+19
11	107,90	10,52	10,84	+32

Die zur Berechnung der Geschwindigkeiten verwendete Formel:

$$v = 0,169 + 0,09887 n$$

ist aus den ersten sieben Beobachtungen abgeleitet.

Die Fehler in den hohen Geschwindigkeiten sind nun ungefähr auf die Hälfte derjenigen Grösse reducirt, welche sie in Versuchsreihe C hatten. Dagegen treten bei den kleinen Geschwindigkeiten wieder grössere Fehler auf als früher. Da die Vermuthung bestand, dieselben könnten von einem bei dem zweiten Versuch vorgekommenen Versehen herrühren, wurde eine zweite Versuchsreihe gemacht, ohne dass irgend eine Abänderung an dem Instrumente vorgenommen worden war.

## Versuchsreihe E.

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R-B$ in cm.
1	1,03	0,27	0,26	-1
2	1,95	0,35	0,35	0
3	3,82	0,52	0,53	+1
4	6,92	0,83	0,84	+1
5	12,74	1,40	1,42	+2
6	19,44	2,10	2,08	-2

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R-B$ in cm.
7	39,81	4,10	4,10	0
8	60,55	6,07	6,15	+8
9	73,26	7,28	7,41	+13
10	92,43	9,07	9,30	+23
11	109,80	10,78	11,13	+35

Die ebenso wie in D abgeleitete Formel war:

$$v = 0,155 + 0,09898 n.$$

Durch Vergleichung der beiden Versuchsreihen D und E erhält man zugleich Aufschluss über die von der Prüfungsmethode zu erwartende Genauigkeit.

Eine dritte Versuchsreihe mit einem anderen Instrumente (Nr. 2), bei welchem der Neigungswinkel  $\varphi = 46^{\circ} 40'$  war, ergab folgendes Resultat.

## Versuchsreihe F.

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R-B$ in cm.
1	2,23	0,34	0,34	0
2	3,75	0,51	0,52	+1
3	6,89	0,81	0,81	0
4	12,29	1,33	1,32	-1
5	19,14	2,00	2,00	0

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R-B$ in cm.
6	36,09	3,68	3,67	-1
7	55,52	5,81	5,81	0
8	67,80	7,89	7,94	+5
9	93,20	9,36	9,58	+22
10	102,46	10,44	10,76	+32

Die zur Berechnung verwendete Formel:

$$v = 0,17 + 0,10287 n$$

war dieses Mal versuchsweise unter Beiziehung der bisher ausgeschlossenen höheren Geschwindigkeit (5,81) berechnet worden und gab ein unerwartet günstiges Resultat. In

den vorausgehenden Versuchsreihen (E und D) würde man die völlige Uebereinstimmung bei 6 m nur durch einen bei 4 m auftretenden negativen Fehler von 2 bis 3 cm erkau-  
fen können.

6. Als der Neigungswinkel ( $\varphi$ ) der Flügelnormale gegen die Axe  $60^\circ 30'$  war, gab das Instrument Nr. 1 die

## Versuchsreihe G.

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
1	0,70	0,26	0,27	+1
2	1,14	0,34	0,34	0
3	2,21	0,52	0,51	-1
4	4,15	0,84	0,82	-2
5	7,92	1,39	1,41	+2
6	12,03	2,06	2,06	0

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. ( $v$ )	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
7	25,36	4,16	4,16	0
8	30,64	5,01	5,00	-1
9	34,22	5,56	5,56	0
10	48,41	7,76	7,80	+4
11	56,59	9,09	9,09	0
12	71,80	11,36	11,49	+13

Unter 1 und 2 sind Mittelwerthe eingetragen, welche aus den zwei der Zeit nach ersten und den zwei der Zeit nach letzten Versuchen combinirt wurden. Diese Versuche waren:

	$n$	( $v$ )		$n$	( $v$ )
Nr. 1	0,703	0,275	Nr. 2	1,108	0,348
„ 13	0,691	0,269	„ 14	1,175	0,335

Die aus den ersten 9 Beobachtungen abgeleitete Formel ist:

$$v = 0,16 + 0,15784 n.$$

Während bei diesem Neigungswinkel ( $\varphi$ ) das Instrument noch auf eine Geschwindigkeit von 0,25 m reagirt, sind die Fehler selbst bei den höchsten Geschwindigkeiten unerheblich.

Da somit die Bedingung gefunden schien, durch deren Erfüllung der hier untersuchten Form des Flügel-Anemometers ein mindestens doppelt so grosser Umfang der Brauchbarkeit verliehen wird, als ihn die früheren Con-

structionen besitzen, wollte ich nichts unterlassen, was zur weiteren Sicherung des Resultates beitragen konnte.

In diesem Bestreben wurde zunächst noch das Instrument Nr. 2 einer Prüfung unterzogen.

Der Winkel  $\varphi$  war  $62^{\circ} 30'$ .

#### Versuchsreihe H.

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. $(v)$	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
1	0,38	0,25	0,24	-1
2	0,89	0,35	0,34	-1
3	1,83	0,52	0,51	-1
4	3,57	0,83	0,84	+1
5	6,57	1,39	1,39	0
6	10,26	2,09	2,08	-1

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. $(v)$	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
7	20,59	3,99	4,00	+1
8	29,30	5,62	5,62	0
9	40,14	7,63	7,63	0
10	50,72	9,54	9,60	+ 6
11	58,61	10,96	11,06	+10

Die Formel  $v = 0,173 + 0,18585 n$  ist hier aus den Beobachtungen 3 bis 8 berechnet.

Das Instrument Nr. 2 gibt auch dieses mal eine schönere Fehlerreihe als Nr. 1, und man könnte dieselbe leicht noch etwas verbessern, wenn man unter Berücksichtigung aller Beobachtungen die Formel:

$$v = 0,180 + 0,18566 n$$

zur Berechnung verwenden würde.

7. Da bei Vergrößerung des Neigungswinkels bis auf  $75^{\circ}$  die Empfindlichkeit eine merkliche Abnahme zeigte, wurde von Ausführung einer grösseren Versuchsreihe Abstand genommen. Indessen unterliegt es kaum einem Zweifel, dass sich hier in den höheren Geschwindigkeiten ein noch engerer Anschluss an eine lineare Formel ergeben hätte, als bei dem Winkel von  $62^{\circ}$ .

Die vorstehend mitgetheilten Versuchsergebnisse berechneten nach zwei Richtungen hin zu bemerkenswerthen Schlüssen.

Erstens ist constatirt, dass der Winkel, den die auf

der Schaufelebene errichtete Normale mit der Axe bildet, auf die Empfindlichkeit des Instruments einen Einfluss in dem Sinne ausübt, dass die Empfindlichkeit bei Winkeln zwischen  $25^{\circ}$  und  $62^{\circ}$  grösser ist als ausserhalb dieses Intervalls. Innerhalb desselben ändert sich die Empfindlichkeit nur wenig, und ihr Maximum (dessen Lage aus diesen Versuchen nicht mit Sicherheit bestimmt werden kann) dürfte etwa  $\frac{1}{3}$  der Grenzwerte betragen.

Zweitens. Die obere Grenze des Bezirks, innerhalb dessen die Umdrehungszahl mit der Windgeschwindigkeit durch eine lineare Gleichung verbunden ist, rückt um so weiter hinauf, je grösser der Winkel wird, den die auf der Schaufelebene errichtete Normale mit der Axe bildet.

Zieht man diese obere Grenze überall da, wo eine lineare Gleichung, welche den Geschwindigkeiten zwischen 0,24 und 4 m möglichst gut angepasst ist, anfängt, um 1 Procent zu grosse Resultate zu geben, so liegt sie

bei 4,3 m, wenn der Neigungswinkel  $25^{\circ}$  ist.

" 5	"	"	"	"	33°	"
" 6	"	"	"	"	46°	"
" 11	"	"	"	"	62°	"

Hieraus ergeben sich Directiven für die Construction des Flügelanemometers, welche durch die folgenden Versuche noch grössere Bestimmtheit erhalten.

V. Versuche bei stetig veränderlicher Geschwindigkeit. Diese Versuche sollen die bereits eingangs angeregte Frage beantworten: mit welcher Genauigkeit bei stetig veränderlicher Geschwindigkeit die berechnete Geschwindigkeit mit der beobachteten übereinstimmt.

Hierbei zeigen sich Instrumente mit kleinen Neigungswinkeln ( $\varphi$ ) in dem Sinne unzuverlässig, dass sie stark überlaufen, so dass, wenn kleine Geschwindigkeiten mit grossen abwechseln, die aus der Umdrehungszahl berechnete mittlere Geschwindigkeit merklich zu hoch ausfällt.

Dieser Umstand kam selbst bei dem Neigungswinkel von  $45^{\circ}$  noch einigermaßen zur Geltung. Als nämlich bei einem Versuche mit dem Instrument Nr. 1 die Ge-



schwindigkeit häufig zwischen den Grenzen 0,3 und 2,7 m in stetigem Uebergang wechselte und die mittlere Geschwindigkeit 0,80 war, gab die Rechnung 0,85. In einem zweiten Versuche, wo die Grenzen der Geschwindigkeit 0,31 und 2,1 waren, stand der beobachteten mittleren Geschwindigkeit 0,76 die berechnete 0,81 gegenüber.

Hingegen gab der Neigungswinkel  $60^\circ$  folgende Resultate:

Intervall der Geschwindigkeiten.		Beob. mittlere Geschwindigkeit.	Ber. mittlere Geschwindigkeit.	Differenzen $R-B$ in cm.
Instr. Nr. 1	0,3 — 6,0 m	1,48	1,49	+1
" "	2 0,5 — 2,8 m	1,16	1,15	-1
" "	" 1,2 — 9,5 m	5,06	5,04	-2
" "	" 0,24 — 6,3 m	1,05	1,02	-3

Endlich wurden mit derselben Construction des Instrumentes Nr. 1 noch drei Versuche angestellt, bei welchen die Geschwindigkeit das erste Mal stets im Wachsen, die beiden anderen Male stets im Abnehmen erhalten wurde.

Gang der Geschwind.	Beobacht. mittlere Geschwind.	Berechn. mittlere Geschwind.	Differenzen $R-B$ in cm.
0,5 — 6,0	2,29	2,26	-3
9,0 — 4,0	5,90	5,93	+3
4,0 — 0,5	2,14	2,17	+3

Es treten demnach in der That Abweichungen im erwarteten Sinne auf, sie sind aber nicht von Belang, und man kommt zu dem Schluss, dass auch bei beliebig veränderlicher Geschwindigkeit die mittelst des Anemometers bestimmte mittlere Geschwindigkeit mit einem grösseren Fehler als 3 cm nicht behaftet sein wird.

VI. Einfluss eines Ringes. Die folgenden Versuche behandeln eine Frage von untergeordneter Bedeutung: nämlich den Einfluss eines Ringes, von welchem das Flügelrad umgeben ist.

Als das Flügelrad des Instrumentes Nr. 2 bei  $62^\circ 30'$

Nr.  
des Versuchs.  
Anzahl der  
Umdrehung.

1 1,  
2 2,  
3 4,  
4 7,  
5 11,

gehö-  
ner.  
gewi-  
Flüg-  
pfind

gut v-  
als u

das  
fahru-  
man  
gelra-  
Besit-  
dem  
umzu-  
lich

Rüc-  
ist d



Neigungswinkel von einem Ringe umgeben war, dessen Breite 1,5 cm und dessen Durchmesser 5,0 cm war, erhielt ich folgende

## Versuchsreihe I.

Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. $v$	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.	Nr. des Versuchs.	Anzahl der Umdrehung. in der Sec. $n$	Beobachtete Geschwind. $v$	Berechnete Geschwind. $v$	Fehler $R - B$ in cm.
1	1,07	0,35	0,35	0	6	22,82	3,99	3,99	0
2	2,16	0,52	0,53	+1	7	34,49	5,95	5,94	-1
3	4,03	0,84	0,84	-1	8	41,42	7,11	7,10	-1
4	7,34	1,40	1,40	0	9	59,84	10,08	10,19	+11
5	11,58	2,10	2,11	+1	10	74,20	12,40	12,59	+19

Die zur Berechnung dienende Formel war:

$$v = 0,166 + 0,1675 n.$$

Vergleicht man dieselbe mit der zur Versuchsreihe H gehörigen, so findet man beide Constanten merklich kleiner. Es hat also der Ring wie der Anfang einer Röhre gewirkt und durch Concentration des Luftstromes auf die Flügel die Umdrehungsgeschwindigkeit erheblich, die Empfindlichkeit ein wenig gesteigert.

Uebrigens ist die Darstellung der Versuche ebenso gut wie in H, so dass der Ring sich in dieser Beziehung als unschädlich erwiesen hat.

Dennoch wird er besser weggelassen, erstens weil er das Instrument unnöthig vergrößert, zweitens weil er erfahrungsgemäss gerade das Gegentheil dessen bewirkt, was man von ihm erwartet. Indem er nämlich das zarte Flügelrad, welches er schützen soll, verdeckt, macht er dem Besitzer des Instrumentes Muth, dasselbe rücksichtslos bei dem Ringe zu fassen und weniger vorsichtig mit demselben umzugehen, als es einem feinen Messinstrumente zuträglich ist.

VII. Brauchbarkeit des Instrumentes von der Rückseite. Vermöge der Construction des Zählwerks ist die Rückseite des Flügelrades hinreichend frei, um die

Verwendung des Instrumentes auch für den Fall zu ermöglichen, dass der Wind von der Rückseite kommt. Indessen ist es, wenn grössere Genauigkeit angestrebt wird, nicht zulässig, dieselbe Formel zu benutzen, welche für die Vorderseite abgeleitet wurde. Vielmehr weisen alle Versuche, welche ich in dieser Richtung angestellt habe, darauf hin, dass, wahrscheinlich infolge eines Ausweichens der Luft aus der stärker besetzten Mitte, etwas mehr Umdrehungen gemacht werden, wenn der Wind von der Rückseite kommt, als wenn er mit gleicher Stärke gegen die Vorderseite bläst.

Solche Versuche wurden unter anderen mit dem Instrumente Nr. 1 im Anschluss an die Versuchsreihe D ausgeführt und ergaben, mit der dort für directen Wind abgeleiteten Formel berechnet:

Nr.	$n$	Beobachtet. $v'$	Berechnet. $v$	Fehler.
1	12,84	1,40	1,44	+4
2	40,95	4,14	4,22	+8

Es würde demnach zum Zwecke genauer Messungen die Ableitung einer besonderen Formel erforderlich sein.

VIII. Controlversuche. 1. Je grösser der Winkel  $\varphi$  genommen wird, den die Normale der Flügelebene mit der Windrichtung bildet, desto geringer wird bei einer bestimmten Windgeschwindigkeit die Anzahl der Umdrehungen, welche das Flügelrad in der Secunde macht, desto grösser also wird der Weg, welchen bei der hier angewendeten Prüfungsmethode das Anemometer zurückzulegen hat, bis es 1000 Umdrehungen gemacht hat.

Aus diesem Verhältniss folgt der Einwand, dass die günstigen Erfolge, welche mit dem Winkel von  $60^\circ$  erzielt wurden, lediglich der Prüfungsmethode zuzuschreiben seien, da bei den mit diesem Winkel angestellten Versuchen der Mitwind infolge der grösseren Anzahl von Umdrehungen des Combes'schen Rotationsapparates stärker ausgebildet wurde und die Umdrehungszahl des Flügelrades bei hohen

Gesch  
sich d

V

die k

Umdr

grösse

drehu

drehu

schwin

I

E ver

folgen

Ge

zahl

dre

1 10

2

2 10

2

3 10

2

I

Gesan

zahl d

drehu

58

100

I

die z

hervo

dies

2

Aich

eben

I

Holz

herge

meter

Geschwindigkeiten so weit mässigte, dass nun auch diese sich der linearen Formel fügten.

Wenn dieser Einwand begründet wäre, müssten auch die kleineren Neigungswinkel ( $\varphi$ ) bei Verlängerung der Umdrehungszeit ähnlich günstige Resultate liefern, wie die grösseren, oder es müsste wenigstens, wenn man die Umdrehungszeit auf das doppelte steigert, die mittlere Umdrehungszahl kleiner werden und somit die berechnete Geschwindigkeit der beobachteten näher kommen.

In diesem Sinne wurden einige Versuche in die Reihe E verflochten, wo der Winkel  $\varphi = 46^{\circ}30'$  war und gaben folgende Resultate:

	Gesamt- zahl der Um- drehungen.	$n$	Zurückgeleg- ter Weg. m	Beobacht. Geschw.	Berechn. Geschw.	Fehler.
1	1000	60,55	31,91 $\pi$	6,07	6,15	+ 8
	2000	61,69	63,57 $\pi$	6,16	6,26	+10
2	1000	73,26	31,65 $\pi$	7,28	7,41	+13
	2000	72,52	63,01 $\pi$	7,18	7,33	+15
3	1000	106,4	31,26 $\pi$	10,45	10,69	+24
	2000	109,8	68,89 $\pi$	10,78	11,13	+35

Bei kleinen Geschwindigkeiten erhielt ich:

	Gesamt- zahl der Um- drehungen.	$n$	Zurückgeleg- ter Weg. m	Beobacht. Geschw.	Berechn. Geschw.	Fehler.
	581	6,92	22,25 $\pi$	0,83	0,84	+1
	1000	6,99	38,12 $\pi$	0,84	0,85	+1

Diese Proben entkräften den erhobenen Einwand, da die zwischen den kürzer und länger dauernden Versuchen hervortretenden Abweichungen überhaupt klein und überdies den zu erwartenden entgegengesetzt sind.

2. Gleich zu Anfang der Arbeit war die Combes'sche Aichungsmethode einer Prüfung unterzogen worden, welche ebenfalls an dieser Stelle Erwähnung finden mag.

Es wurde durch Aufschrauben von Eisenbändern auf Holzplatten ein gerades Schienengeleise von 21 m Länge hergestellt, auf welchem ein zur Aufnahme des Anemometers bestimmter vierrädriger Wagen von etwa 12 cm

Länge und 6 cm Breite fahren konnte. Um denselben hinreichend zu führen, wurde er in eine über 42 m lange Schnur eingeschaltet, welche ihrerseits über ein an dem einen Ende der Bahn aufgestelltes (60 cm hohes) Treibrad und über zwei am anderen Ende der Bahn befindliche Leitrollen geschlungen war. Demnach konnte durch Drehen des Rades das auf dem Wagen aufgestellte Instrument längs der Eisenbahn hin und her geführt werden. Sowohl beim Abgang als bei der Ankunft schloss der Wagen durch Eintauchen eines Stiftes in Quecksilber die Leitung eines galvanischen Stromes, wodurch auf dem oben erwähnten Reliefschreiber die Zeit begrenzt wurde, welche das Instrument zur Zurücklegung der 21 m gebrauchte. Die Zahl der Umdrehungen des Flügelrades musste auf dem Zifferblatte abgelesen werden.

Mit dieser Vorrichtung und dem Instrumente Nr. 2 erhielt ich folgende Resultate:

Nr.	Gesamtzahl der Umdrehungen.	Dauer des Versuchs in Sekunden.	$n$	Beobachtet. ( $v$ )	Berechnet. $v$	Fehler.
1	138	46,03	3,00	0,46	0,46	0
2	177	17,50	10,11	1,20	1,19	-1
3	199	7,28	27,3	2,88	2,95	+7
4	192	7,07	27,2	2,97	2,94	-3
5	197	6,72	29,3	3,13	3,15	+2

Die Elemente der Formel  $v = 0,15 + 0,1026n$ , welche zu dieser Rechnung verwendet wurden, waren dadurch gewonnen worden, dass das Instrument auf einem Combes'schen Rotationsapparat von einem Meter Radius je 1 Minute lang mit Geschwindigkeiten von 0,42 m und 3,14 m herumgeschwungen wurde.

Somit bieten die erhaltenen Resultate wenigstens innerhalb ihres Bezirks die Beruhigung, dass selbst bei einem kurzen Arm (von 1 m Länge) der Combes'sche Rotationsapparat nicht wesentlich andere Umdrehungszahlen liefert als eine geradlinige Bahn.

Weiter als auf 3 Meter Geschwindigkeit konnten diese Versuche nicht getrieben werden, ohne das Instrument der nächsten Gefahr eines Unfalls auszusetzen.

IX. Vergleichen mit der Combes'schen Formel. Wenngleich die vorstehende Untersuchung ein ausschliesslich praktisches Ziel verfolgt und mit der Erreichung dieses Zieles abgeschlossen wurde, war es doch nicht ohne Interesse, schliesslich die Constanten ( $b$ ), welche sich als Coëfficienten der Umdrehungszahl ( $n$ ) ergaben, mit dem von Combes dafür aufgestellten Ausdruck  $2q\pi \operatorname{tg} \varphi$  zu vergleichen. Es wurde zu diesem Zwecke folgende Zusammenstellung gemacht:

Nr.	$\varphi$	$q$	$2q\pi \operatorname{tg} \varphi$	$b$	Differenzen in Einheiten der 4. Decimale $R-B$ .	Bemerkungen.
1	11° 0'	0,0150	0,0183	0,0308	- 125	} Werth von $b$ zwischen 6,3 und 9,7 m.
2	20° 0'	0,0150	0,0343	0,0339	+ 4	
3	25° 40'	0,0150	0,0453	0,0476	- 23	
4	32° 50'	0,0150	0,0608	0,0622	- 14	} Mittelwerth von $b$ aus den Versuchsreihen $D$ und $E$ .
5	46° 30'	0,0150	0,0993	0,0989	+ 4	
6	46° 40'	0,0153	0,1021	0,1029	- 8	
7	60° 30'	0,0150	0,1666	0,1578	+ 88	
8	62° 30'	0,0153	0,1851	0,1858	- 7	

In den ersten beiden Nummern ist die Constante  $b$  aus je zwei Versuchen bei ca. 6 m und 10 m Geschwindigkeit berechnet, wo sich die kleinsten und somit der Rechnung am nächsten liegenden Werthe ergaben. Bei den übrigen Nummern sind die schon bei den entsprechenden Versuchsreihen mitgetheilten Werthe von  $b$  beigesetzt, welche sich aus den dort beigezogenen Beobachtungen als die wahrscheinlichsten ergeben hatten.

Sieht man von der ersten Nummer dieser Vergleichung ab, so lässt sich nicht verkennen, dass zwischen Rechnung und Beobachtung eine grosse Uebereinstimmung stattfindet. Man kann in jeder Versuchsreihe (ausser Nr. 1) zwei Paare

von Beobachtungen finden, welchen zwei Werthe von  $b$  entsprechen, die den nach Combes berechneten Werth  $2\varrho\pi \tan \varphi$  umschliessen. Selbst in Nr. 7, wo die Differenz 88 Einheiten der vierten Decimale beträgt, würde man durch Combination der Beobachtungen 1 und 4 (Versuchsreihe G) für  $b$  den Werth 0,168 erhalten, welcher den berechneten erreicht.

Es schneidet demnach die Gerade:

$$v = a + (2\varrho\pi \tan \varphi) n$$

die bei grossen Winkeln  $\varphi$  sehr flach verlaufende Curve  $v = f(n)$ , welche den wahren Zusammenhang zwischen der Windgeschwindigkeit  $v$  und der Umdrehungszahl  $n$  darstellt, in wenigstens zwei Puncten. Dieselben scheinen dem Ursprunge der Coordinaten um so ferner zu liegen, je kleiner der Winkel  $\varphi$  ist.

Resultate. Das wesentlichste Resultat dieser Arbeit ist die Construction eines Anemometers, welches bei einer auf ca. 7 qcm anzuschlagenden Verticalprojection, einer Höhe von 5 cm und einer Breite von 4 cm geeignet ist, die mittlere Geschwindigkeit von Luftströmen constanter Richtung innerhalb weiter Grenzen zu messen. Gibt man den Schaufeln eine solche Stellung, dass die auf ihnen errichtete Normale einen Winkel von  $60^\circ$  mit der Drehungsaxe bildet, so hat man, wenn die Geschwindigkeit zwischen 0,25 und 8 Meter liegt oder schwankt, von seiten des Instrumentes einen grösseren Fehler als 0,03 Meter nicht zu erwarten. Der Fehler kann hingegen auf +0,2 m anwachsen, wenn die zu messende Geschwindigkeit 12 m übersteigt. Daher hat man, wenn das Instrument für Messung sehr grosser Geschwindigkeiten eingerichtet (z. B. den Anforderungen Morins genügt) werden soll, unter Verzicht auf die äusserste Empfindlichkeit den oben genannten Winkel noch weiter zu vergrössern.

VIII. *Erwiderung auf eine Bemerkung des  
Hrn. Dr. Meyerstein; von Hermann Herwig.*

Vor kurzem habe ich in diesen Annalen<sup>1)</sup> gelegentlich ein Galvanometer beschrieben, welches ich für die verschiedensten Anwendungen hatte construiren lassen und welches, in den Einzelheiten sich natürlicherweise grösstentheils an Bekanntes anschliessend, in seiner gesammten Zusammensetzung eine vielleicht weniger bekannte Form darstellt, die sich für die mannigfaltig damit verbundenen Zwecke, wie ich glaube, sehr empfiehlt. Hr. Dr. Meyerstein hat diese Beschreibung in dem irrthümlichen Sinne aufgefasst<sup>2)</sup>, als sollte jeder beschriebene Theil als etwas ganz Neues dargestellt werden, und zwar um so mehr, je genauer die Beschreibung und Motivirung ausfiel. Davon habe ich indessen weder etwas gesagt noch gedacht. Wenn ich Einzelnes mehr betonte, z. B. die Vorzüge, welche die Anwendung langer, kräftiger Magnete bietet, nochmals kurz hervorhob, so hatte das seinen einfachen Grund darin, dass diese Punkte nach meiner Ansicht von den Constructeurs (und diese hatte ich bei den einschlägigen Bemerkungen vorzugsweise im Auge) entschieden wenig berücksichtigt werden.

Während ich so mit Hrn. Meyerstein derselben Meinung bin, dass mir für viele Einzelheiten des Instrumentes, speciell für die eben genannte, die Priorität nicht zukommt, bin ich in einem andern Punkte entschieden anderer Ansicht wie Hr. Meyerstein. Hr. Meyerstein kann es sich nicht erklären, dass ich meinen Multiplicator in zwei völlig getrennte Hälften theilte, und meint, ein in der bekannten üblichen Weise doppelt gewickelter Draht gebe grössere Empfindlichkeit „ohne jeden

1) Wied. Ann. I. p. 523.

2) Wied. Ann. III. p. 319.



anderen Nachtheil“. Das ist zuviel behauptet. Die etwas geringere Empfindlichkeit bei dem von mir gewählten Arrangement macht nicht zu viel aus, da es sich nur um eine Isolirschicht von kaum 3 mm Breite handelte gegenüber Magneten von 11 mm Dicke. Dagegen vermied ich zwei Nachtheile, die zwar für gewöhnliche Anwendungen unmerklich sein werden, für mein zu den mannichfaltigsten, auch delicatesten Zwecken bestimmtes Instrument aber nicht unberücksichtigt bleiben durften. Bei der gewöhnlichen Doppelwicklung kommt nämlich einmal den Drahtrollen im Falle der Differentialanwendung bereits eine erhebliche electrostatische Capacität zu und zweitens ist in demselben Falle ein unter gewissen Umständen nicht mehr zu vernachlässigender seitlicher Stromverlust (und damit eine besondere Magnetablenkung) zu besorgen, wenn namentlich an die bei den feineren Drahtsystemen ja nicht zu vermeidende Seidenumspinnung und deren hyroskopische Eigenschaften gedacht wird. Ich selbst hatte bei gewissen schwierigen, noch nicht abgeschlossenen Versuchen Störungen aus diesen Gründen an einer gewöhnlichen Doppelwicklung des Differentialgalvanometers wahrgenommen und dieselbe deshalb durch die andere Anordnung ersetzt. Uebrigens erkläre ich, um nicht nochmals Irrthum zu veranlassen, ausdrücklich, dass ich auch diese Dinge für unter Fachgenossen längst bekannt halte und keineswegs glaube, mit dem Vorstehenden etwas ganz Neues gesagt haben.

Darmstadt, den 20. März 1878.